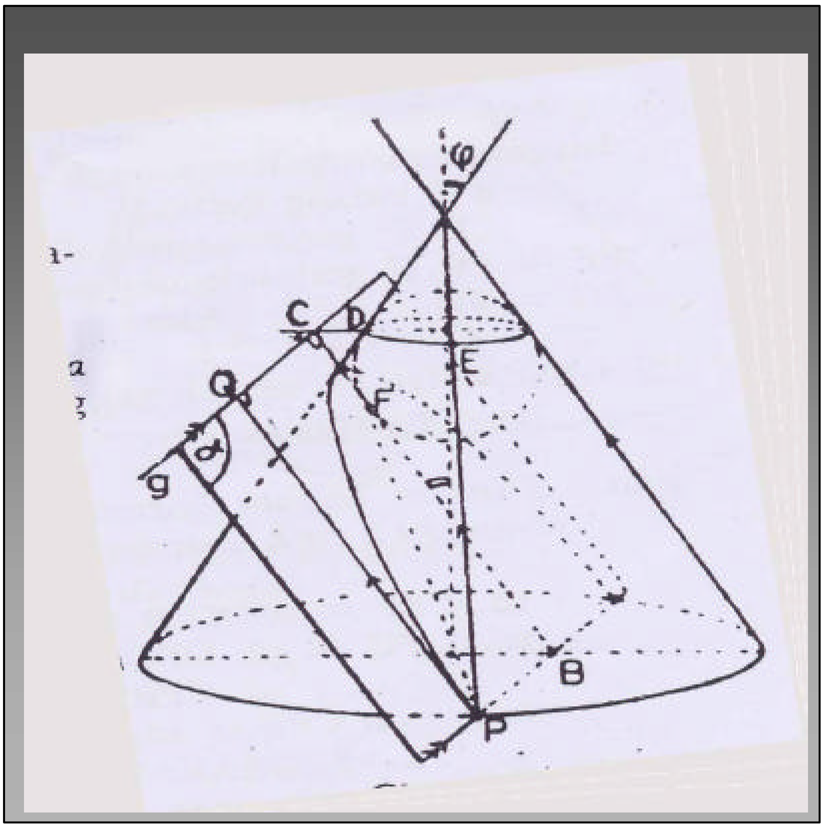
KODE MAT. 10

IRISAN KERUCUT

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.10

Irisan Kerucut



BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.10

Irisan Kerucut

Penyusun:

Drs. Mega Teguh B., M.Pd.

Editor:
Dr. Manuharawati, MSi.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata-pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada St andar Kompetensi Nasional (SKN) atau st andarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja st andar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

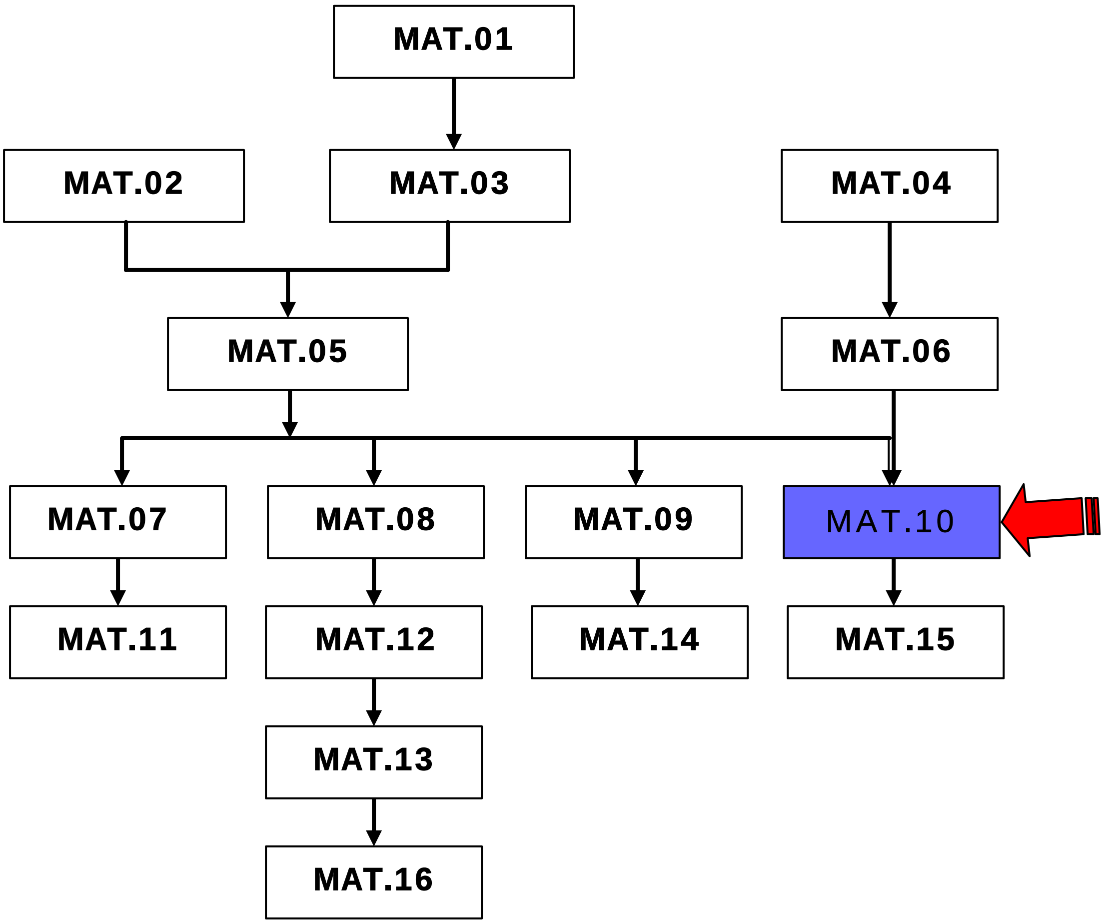
Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata-pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,

Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

DAFTAR ISI

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	ProgramLinier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Lingkaran	Himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu. Selanjutnya titik itu disebut *pusat lingkaran*.
Jari-jari lingkaran	Ruas garis yang menghubungkan tiap-tiap titik pada lingkaran dan titik pusat lingkaran.
Ellips	Himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya.
Parabola	Hmpunan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu pula. Titik itu disebut *fokus parabola*, sedangkan garis itu disebut *garis arah* atau ? *direktriks.* Parabola dapat dilukis jika diketahui garis arah dan titik fokus yang terletak pada suatu garis.
Hiperbola	Himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya. Selanjutnya dua titik itu disebut *Titik Fokus* Hiperbola.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini anda akan mempelajari 4 Kegiatan Belajar. Kegiatan Belajar 1 adalah **Lingkaran**, Kegiatan Belajar 2 adalah **Ellips,** Kegiatan Belajar 3 **Parabola,** dan Kegiatan Belajar 4 adalah **Hiperbola**. Dalam Kegiatan Belajar 1, yaitu Lingkaran, akan diuraikan mengenai unsur-unsur lingkaran beserta deskripsinya, persamaan lingkaran baik pusat di (0,0) maupun di (a,b). Juga dibahas persamaan garis singgung lingkaran, garis singgung persekutuan luar maupun dalam. Dalam Kegiatan Belajar 2, yaitu ellips akan diuraikan mengenai ellips beserta unsur-unsurnya serta deskripsinya, persamaan ellips, persamaan garis singgung serta aplikasinya. Dalam kegiatan belajar 3 yaitu parabola akan dibicarakan unsur-unsurnya serta deskripsinya, persamaan parabola, persamaan garis singgung pada parabola serta aplikasinya. Dalam kegiatan belajar 4 yaitu hiperbola akan dibicarakan unsur-unsurnya serta deskripsinya, persamaan hiperbola.

B. Prasyarat

Prasyarat untuk mempelajari modul ini adalah kesebangunan, jarak, kesejajaran, ketegaklurusan dan fungsi. Semua materi prasyarat tersebut terdapat dalam modul relasi dan fungsi dan geometri datar dan ruang.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

Untuk mempelajari modul ini, hal-hal yang perlu anda lakukan adalah sebagai berikut.

1. Pelajari daftar isi serta skema modul dengan cermat, karena daftar isi dan skema akan menuntun anda dalam mempelajari modul ini dan kaitannya dengan modul-modul yang lain.

2. Untuk mempelajari modul ini haruslah berurutan, karena materi yang mendahului merupakan prasyarat untuk mempelajari materi berikutnya.
3. Pahamilah contoh-contoh soal yang ada, dan kerjakanlah semua soal latihan yang ada. Jika dalam mengerjakan soal anda menemui kesulitan, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
4. Kerjakanlah soal evaluasi dengan cermat. Jika anda menemui kesulitan dalam mengerjakan soal evaluasi, kembalilah mempelajari materi yang terkait.
5. Jika anda mempunyai kesulitan yang tidak dapat anda pecahkan, catatlah, kemudian tanyakan kepada guru pada saat kegiatan tatap muka atau bacalah referensi lain yang berhubungan dengan materi modul ini. Dengan membaca referensi lain, anda juga akan mendapatkan pengetahuan tambahan.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan anda dapat:

1. Menemukan persamaan lingkaran beserta unsur-unsurnya,
2. Menggunakan rumus garis singgung untuk memecahkan masalah,
3. Menggunakan panjang garis singgung persekutuan luar untuk memecahkan masalah,
4. Menemukan persamaan ellips beserta unsur-unsurnya,
5. Menggunakan persamaan ellips untuk memecahkan masalah,
6. Menemukan persamaan parabola beserta unsur-unsurnya,
7. Menggunakan persamaan parabola untuk memecahkan masalah menentukan frekuensi harapan suatu kejadian,
8. Menemukan persamaan hiperbola beserta unsur-unsurnya,
9. Menggunakan persamaan hiperbola untuk memecahkan masalah.

E. Kompetensi

Kompetensi : IRISAN KERUCUT
Program Keahlian : Program Adaptif
Mata Diklat-Kode : MATEMATIKA/MAT10
Durasi Pembelajaran : 56 jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
1. Menerapkan konsep Lingkaran	✍ Unsur-unsur lingkaran dideskripsikan sesuai ciri-cirinya ✍ Persamaan lingkaran ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ✍ Garis singgung sekutu luar dan dalam dilukis dari dua lingkaran yang diketahui ✍ Panjang garis singgung sekutu luar dan dalam di-hitung sesuai jari-jari dan jarak pusat kedua lingkaran ✍ Konsep lingkaran diterapkan dalam penyelesaian masalah kejuruan.	✍ Unsur-unsur lingkaran ✍ Persamaan lingkaran ✍ Garis singgung sekutu luar	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah irisan kerucut	✍ Pengertian unsur-unsur lingkaran ✍ Penentuan persamaan lingkaran ✍ Pengertian garis singgung sekutu ✍ Penentuan panjang garis singgung sekutu ✍ Penerapan konsep ling-karan dalam menyelesai-kan masalah kejuruan	✍ Menggambar irisan kerucut. ✍ Menggunakan persamaan lingkaran, parabola, elips, hiperbola dalam menyelesaikan masalah irisan kerucut.
2. Menerapkan konsep parabola	✍ Unsur-unsur parabola dides-kripsikan sesuai ciri-cirinya ✍ Persamaan parabola ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ✍ Konsep parabola diterapkan dalam penyelesaian masalah kejuruan	✍ Unsur-unsur parabola ✍ Persamaan parabola dan grafiknya	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah irisan kerucut	✍ Unsur-unsur parabola - Direktriks - Koordinat titik puncak - Koordinat titik fokus - Persamaan sumbu ✍ Grafik persamaan parabola ✍ Penerapan konsep para-bola dalam menyelesai-kan masalah kejuruan	

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
3. Menerapkan konsep elips	✍ Unsur-unsur elips dideskripsikan sesuai ciri-cirinya ✍ Persamaan elips ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ✍ Konsep elips diterapkan dalam penyelesaian masalah kejuruan.	✍ Unsur-unsur Elips ✍ Persamaan Elips dan grafiknya	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah irisan kerucut	✍ Pengertian Elips ✍ Persamaan Elips ✍ Unsur-unsur elips - Koordinat titik puncak - Koordinat titik pusat - Koordinat fokus - Sumbu mayor dan sumbu minor ✍ Sketsa elips ✍ Penerapan konsep elips dalam menyelesaikan masalah kejuruan.	
4. Menerapkan konsep hiperbola	✍ Unsur-unsur hiperbola dideskripsikan sesuai ciri-cirinya ✍ Persamaan hiperbola ditentukan berdasarkan unsur-unsur yang diketahui ✍ Konsep hiperbola diterapkan dalam penyelesaian masalah kejuruan	✍ Unsur-unsur hiperbola ✍ Persamaan hiperbola dan sketsanya.	✍ Teliti dan cermat dalam menyelesaikan masalah irisan kerucut	✍ Pengertian hiperbola dan unsur-unsurnya: - Titik Pusat - Titik puncak - Titik fokus - Asimtot - Sumbu mayor - Sumbu minor ✍ Sketsa parabola ✍ Penerapan konsep hiperbola dalam menyelesaikan masalah kejuruan.	

F. Cek kemampuan

Kerjakanlah soal-soal berikut ini, jika anda dapat mengerjakan sebagian atau semua soal berikut ini, maka anda dapat meminta langsung kepada instruktur atau guru untuk mengerjakan soal-soal evaluasi untuk materi yang telah anda kuasai pada BAB III.

1. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya O(0,0) dengan jari-jari 4.
2. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya A(a,b) dengan jari-jari 4.
3. Tentukan persamaan ellips yang pusatnya O(0,0) dengan panjang sumbu panjang 8 dan sumbu pendek 4.
4. Tentukan persamaan ellips yang pusatnya P(-2,5) dengan panjang sumbu panjang 8 dan sumbu pendek 4.
5. Tentukan koordinat titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$.
6. Tentukan persamaan ellips yang eksentrisitas numeriknya e = $\frac{2}{3}$ salah satu titik apinya F(6,0).
7. Tentukan tititk api dan persamaan garis arah parabola $y^2=24x$.
8. Carilah persamaan garis yang menghubungkan titik M dan titik api parabola $y^2=20x$, jika absis titik M adalah 7.
9. Tentukan nilai k sehingga persamaan y=kx+2 menyinggung parabola $y^2=4x$.
10. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di (0,0) dan panjang sumbu hiperbola masing-masing 16 dan 12. Tentukan pula jarak antara dua fokus, persamaan direktrik, dan asimtot.
11. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di (0,0) jika eksentrisitas nya $\frac{13}{12}$ sedangkan jarak antara kedua fokus 10.

BAB II. PEMBELAJARAN

A. Rencana Belajar SiSWA

Kompetensi	:	Menerapkan konsep irisan kerucut
Sub Kompetensi	:	- Menerapkan konsep lingkaran - Menerapkan konsep ellips - Menerapkan konsep parabola - Menerapkan konsep hiperbola

Tulislah semua jenis kegiatan yang Siswa lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian mintalah tsiswa tangan kepada guru atau instruktur Siswa.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tanda Tangan Guru

B. Kegiatan Belajar

1. Kegiatan Belajar 1: Lingkaran

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar 1 ini, diharapkan anda dapat mendeskripsikan irisan kerucut yaitu lingkaran beserta pusat dan jari-jarinya.

? Memahami unsur-unsur lingkaran.

? Menentukan persamaan lingkaran jika pusat dan jari-jarinya diketahui.

? Menghitung panjang garis sekutu luar dan dalam dari dua lingkaran.

? Dapat melukis garis singgung sekutu luar dan dalam dari dua lingkaran.

? Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan lingkaran.

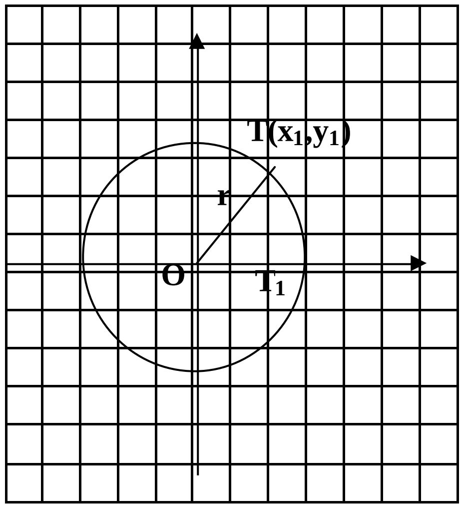
b. Uraian Materi

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah *lingkaran*. Buatlah kerucut dari kertas manila, kemudian potong sejajar bidang alas. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang dipotong tadi? Permukaan kerucut yang dipotong tadi berbentuk lingkaran.

Dalam matematika, lingkaran didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu. Selanjutnya titik itu disebut *pusat lingkaran*. Sedangkan ruas garis yang menghubungkan tiap-tiap titik pada lingkaran dan titik pusat lingkaran disebut *jari-jari lingkaran*. Jadi lingkaran dapat dilukis jika titik pusat dan jari-jari lingkaran diketahui.

MENENTUKAN PERSAMAAN LINGKARAN

Ambil sebarang titik pada lingkaran misal $T(x_1, y_1)$ dan titik O sebagai pusat lingkaran.



Tarik garis melalui T tegak lurus sumbu x misal di T_1.

Pandang ? O T_1T

? O T_1T merupakan segitiga siku-siku, dimana membentuk sudut siku-siku di titik T_1.

Sehingga berlaku teorema pytagoras:

$O T_1^2 + T_1T^2 = OT^2$

$x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Karena berlaku untuk semua titik pada lingkaran maka $x^2 + y^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

merupakan persamaan lingkaran yang pusatnya O(0,0) dan jari-jari r

Contoh 1

a. Persamaan lingkaran pusatnya O(0,0) dan jari-jari 3 adalah $x^2 + y^2 = 9$

b. Persamaan lingkaran pusatnya O(0,0) dan jari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$

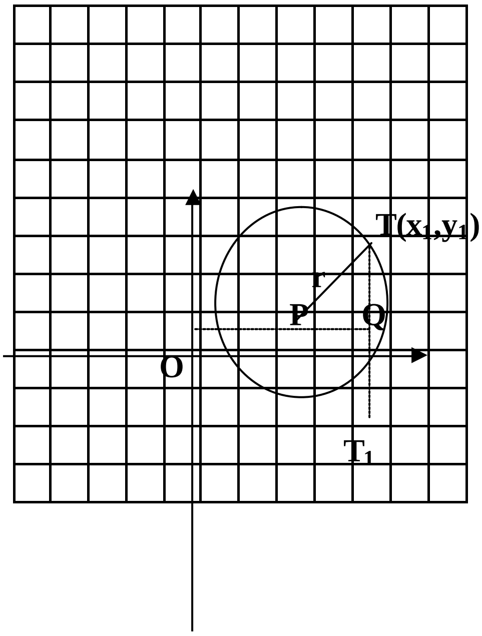
c. Persamaan lingkaran pusatnya O(0,0) dan jari-jari 1 adalah $x^2 + y^2 = 1$

Contoh 2

a. $x^2 + y^2 = 16$ adalah lingkaran dengan pusat O(0,0) dan jari-jari 4

b. $x^2 + y^2 = 4$ adalah lingkaran dengan pusat O(0,0) dan jari-jari 2

PERSAMAAN LINGKARAN PUSAT TIDAK PADA (0,0)



Ambil sebarang titik pada lingkaran misal $T(x_1, y_1)$ dan titik $P(a,b)$ sebagai pusat lingkaran.

Tarik garis melalui T tegak lurus sumbu x misal di T_1.

Buat garis yang melalui titik P sejajar sumbu x, sehingga memotong $\overline{TT_1}$ di titik Q.

Pandang ? PQT. ? PQT merupakan segitiga siku-siku di titik Q, $TQ = (y_1 - b)$ dan $PQ = (x_1 - a)$.

Sehingga berlaku teorema pytagoras:

$PQ^2 + QT^2 = OT^2$

$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

Karena berlaku untuk setiap titik $T(x_1, y_1)$ pada lingkaran, maka berlaku

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

> $$\mathbf{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$
> **merupakan persamaan lingkaran pusat (a,b) dengan jari-jari r**

Contoh 3

Tentukan persamaan lingkaran dengan

a. pusat (2, 3) dan jari-jari 5

b. pusat (-3,1) dan jari-jari 2

c. pusat (2, -2) dan jari-jari 1

Penyelesaian

a. Persamaan lingkaran dengan pusat (2, 3) dan jari-jari 5 adalah

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

b. Persamaan lingkaran dengan pusat (-3, 1) dan jari-jari 2 adalah

$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

c. Persamaan lingkaran dengan pusat (2, -2) dan jari-jari 1 adalah

$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$

Contoh 4

Tentukan koordinat pusat dan jari jari lingkaran dengan persamaan

$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$

Penyelesaian

$4x^2 + 4y^2 - 4x + 16y - 19 = 0$, kedua ruas dibagi 4 didapat

$x^2 + y^2 - x + 4y - \frac{19}{4} = 0$

$x^2 - x + y^2 + 4y - \frac{19}{4} = 0$, dijadikan kuadrat sempurna didapat

$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 4y + 4 = \frac{19}{4} + \frac{1}{4} + 4$

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + 2)^2 = 9$

Jadi Koordinat pusat lingkaran adalah $(\frac{1}{2}, -2)$ dan jari-jarinya 3

Contoh 5

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(1, 3) dan melalui titik Q(-2,5)

Penyelesaian

Jari-jari lingkaran adalah panjang

$r = PQ = \sqrt{(x_P ? x_Q)^2 ? (y_P ? y_Q)^2}$

$r = PQ = \sqrt{(1 ? 2)^2 ? (3 ? 5)^2}$

$r = PQ = \sqrt{13}$

Jadi persamaan lingkarannya adalah $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 13$

BENTUK UMUM PERSAMAAN LINGKARAN

Bentuk umum persamaan lingkaran didapat dengan menurunkan persamaan lingkaran yang berpusat tidak pada (0,0) berikut ini:

$(x – a)^2 \; + (y – b)^2 \; = r^2$

$x –2ax+ a^2 \; + y^2 –2by + b^2 \; = r^2$

$x^2 \; + x^2 –2ax –2by + a^2 + b^2 = r^2$

$x^2 \; + y^2 –2ax –2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$x^2 \; + y^2 + Ax + By + C = 0$, dengan $A = -2a$, $B = -2b$ dan $C = a^2 + b^2 - r^2$

atau $a = -\frac{1}{2} A$, $b = -\frac{1}{2} B$ dan $r = \sqrt{(?\frac{1}{2}A)^2 ? (?\frac{1}{2}B)^2 ? C}$

Bentuk umum persamaan ingkaran adalah $x^2 \; + y^2 + Ax + By + C = 0$
dengan pusat di $(?\frac{1}{2}A, ?\frac{1}{2}B)$ **dan jari-jari r =** $\sqrt{(?\frac{1}{2}A)^2 ? (?\frac{1}{2}B)^2 ? C}$

Contoh 6

Tentukan koordinat pusat dan jari jari lingkaran dengan persamaan

$4x^2 \; + 4y^2 -4x + 16y -19 = 0$

Penyelesaian

$4x^2 \; + 4y^2 -4x + 16y -19 = 0$, kedua ruas dibagi 4 didapat

$x^2 \; + y^2 -x + 4y -\frac{19}{4} = 0$

$A = -1$, $B = 4$ dan $C = -\frac{19}{4}$, maka pusat lingkaran $(?\frac{1}{2}A, ?\frac{1}{2}B) = (\frac{1}{2}, \; -2)$ dan

jari-jarinya $r = \sqrt{(?\frac{1}{2}A)^2 ? (?\frac{1}{2}B)^2 ? C} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 ? (?2)^2} + \frac{19}{4}$

$r = \sqrt{9} = 3$

Jadi koordinat pusat lingkaran adalah $(\frac{1}{2}, \; -2)$ dan jari-jarinya 3

Bandingkan jawaban ini dengan contoh 4. Lebih mudah mana?

Contoh 7

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik P(1,0), Q(0,1) dan R(2,2).

Penyelesaian

Misal persamaan lingkaranya adalah $x^2 \; + y^2 + Ax + By + C = 0$

Titik P (1,0) pada lingkaran berarti $1^2 + 0^2 + A.1 + B.0 + C = 0$

$A + C = -1$ atau $A = -1 – C$ ....(1)

Titik Q (0,1) pada lingkaran berarti $0^2 + 1^2 + A.0 + B.1 + C = 0$

$B + C = -1$ atau $B = -1 - C$ ....(2)

Titik R (2,2) pada lingkaran berarti $2^2 + 2^2 + A.2 + B.2 + C = 0$

$2A + 2B + C = -8$ ....(3)

Substitusi (1) dan (2) pada (3) didapat $2(-1 – C) + 2(-1-C) + C = -8$

$-2 - 2C –2 –2C + C = 0$

$-3C = - 4$

$C = \frac{4}{3}$

Dari (1) didapat $A = -\frac{7}{3}$

Dari (2) didapat $B = -\frac{7}{3}$

Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Garis singgung lingkaran adalah suatu garis yang memotong lingkaran tepat pada satu titik.

a. Gradien garis singgung diketahui dan lingkaran berpusat di (0,0)

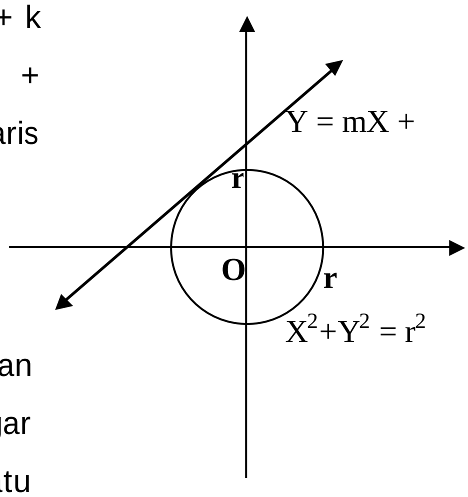
Misal persamaan garis singgung: $y = mx + k$

Sehingga ada satu titik pada lingkaran: $x^2 + y^2 = r^2$ yang memenuhi persamaan garis singgung di atas. Akibatnya:

$x^2 + (mx + k)^2 = r^2$

$x^2 + m^2x^2 + 2mkx + k^2 = r^2$

$(1+m^2)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0$; merupakan persamaan kuadrat dalam variabel x. Agar persamaan kuadrat itu mempunyai satu



harga x, maka harus terpenuhi syarat diskriminan dari persamaan itu sama dengan nol, yaitu: D = 0.

$(2mk)^2 – 4. (1+m^2). (k^2 - r^2) = 0$

$4 m^2k^2 - 4 (k^2 + m^2k^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$

$- 4 (k^2 - r^2 - m^2r^2) = 0$

$k^2 - r^2(1+m^2) = 0$

$k = \underline{?}\ r \sqrt{1?\, m^2}$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$y = mx\ \underline{?}\ r \sqrt{1?\, m^2}$

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y = mx\ \underline{?}\ r \sqrt{1?\, m^2}$

Contoh 8

Tentukan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 16$ dengan gradien 3

Penyelesaian

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y = mx\ \underline{?}\ r \sqrt{1?\, m^2}$

$y = 3 x\ \underline{?}\ 4 \sqrt{1?\, 3^2}$

$y = 3 x\ \underline{?}\ 4 \sqrt{10}$

b. Gradien garis singgung diketahui dan lingkaran berpusat di (a, b)

Anda dapat menurunkan rumusnya dengan cara yang serupa dengan di atas. Anda dapat menemukan persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di (a,b) yaitu $y-b = m(x-a)\ \underline{?}\ r \sqrt{1?\, m^2}$

Persamaan garis singgung pada lingkaran $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y - b = m(x – a)\ \underline{?}\ r \sqrt{1?\, m^2}$

Contoh 9

Tentukan garis singgung pada lingkaran $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ dengan gradien -2

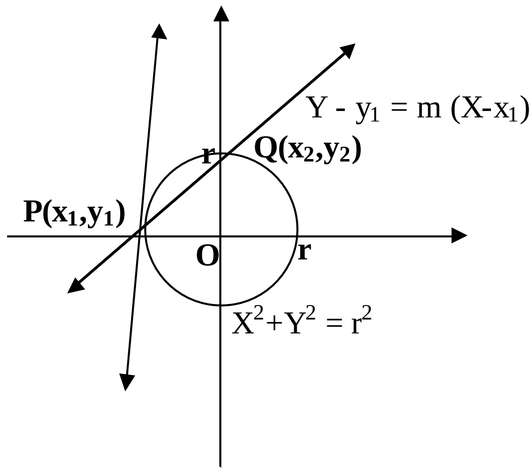
Penyelesaian

Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y - b = m(x - a) \underline{?}\ r \sqrt{1 ? m^2}$

$$y - 1 = 3 (x + 3) \underline{?}\ 2 \sqrt{1 ? (?2)^2}$$

$$y = 3x + 10 \underline{?}\ 4 \sqrt{5}$$

c. **Persamaan garis singgung jika titik singgungnya diketahui pada lingkaran berpusat di (0,0)**



Misal titik singgungnya di T (x_1,y_1)

Persamaan garis: $y - y_1 = m (x - x_1)$

Dengan $m = tg\ ? = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Sehingga persamaan garis yang melalui $\overline{PQ}$ adalah

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ ....(1)

P pada lingkaran sehingga berlaku :

$x_1^2 + y_1^2 = r^2$

Q pada lingkaran sehingga berlaku :

$x_2^2 + y_2^2 = r^2$

$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ atau $x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$

$(x_1 - x_2) (x_1 + x_2) = (y_2 - y_1) (y_2 + y_1)$

$$\frac{y_2 ? y_1}{x_1 ? x_2} ? \frac{y_2 ? y_1}{x_1 ? x_2}$$

$$\frac{y_2 ? y_1}{x_2 ? x_1} ? \ ? \frac{y_2 ? y_1}{x_2 ? x_1}$$

Sehingga $y - y_1 = \; ? \dfrac{x_2 \; ? \; x_1}{y_2 \; ? \; y_1} (x – x_1)$

Jika Q mendekati P sehingga hampir $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, dimana PQ = 0.

$y - y_1 = \; ? \dfrac{x_1}{y_1} (x – x_1)$

$y_1y – y_1^2 = - x_1x + x_1^2$

$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2$

$x_1x + y_1y = r^2$

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1,y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$

Contoh 10

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik (3,-4)

Penyelesaian

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (3,-4) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah $3x - 4y = 25$

d. Titik singgungnya diketahui pada lingkaran berpusat di (a, b)

Persamaan lingkaran yang berpusat di (a,b) adalah $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$, dapat diubah menjadi $(x - a)(x - a) + (y - b)(y - b) = r^2$.

Analogi dengan yang anda pelajari di atas, maka persamaan garis singgungnya adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$.

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1,y_1) pada lingkaran $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$ adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

atau

$x_1x + y_1y - a(x + x_1) – b(y + y_1) + a^2 + b^2 = r^2$

$x_1x + y_1y - a(x + x_1) – b(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

$$x_1x + y_1y - (-\frac{1}{2}A)(x + x_1) - (-\frac{1}{2}B)(y + y_1) + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

karena $a = -\frac{1}{2}A$, $b = -\frac{1}{2}B$ dan $r = \sqrt{(? \frac{1}{2}A)^2 ? (? \frac{1}{2}B)^2 ? C}$, maka

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, adalah

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

Contoh 11

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$ di titik (1,1)

Penyelesaian

Dari persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$ diperoleh A = 6, B = -4 dan C = -3. Jadi persamaan garis singgung di titik (1,1) adalah:

$$x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$$

$x + y + 3(x + 1) + -2(y + 1) - 4 = 0$

$x + y + 3x + 3 - 2y - 2 - 4 = 0$

$4x - y - 3 = 0$

Contoh 12

Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 16$ di titik (2,2).

Penyelesaian

Persamaan garis singgung di titik (1,1) adalah:

$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2.$

$(2 - 6)(x - 6) + (2 + 2)(y + 2)) = 16$

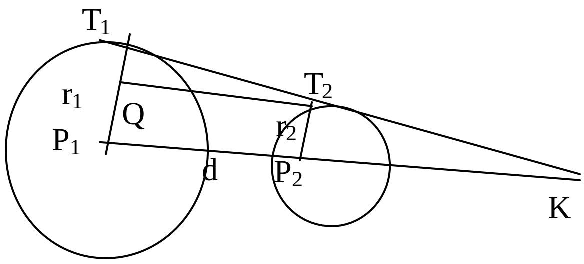
$-4(x - 6) + 4(y + 2)) = 16$ atau $-4x + 24 + 4y + 8 = 16$

$-4x + 4y = -16$, jika kedua ruas dikalikan $-\frac{1}{4}$ didapat:

$x - y = 4$ merupakan persamaan garis singgung yang diminta.

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG SEKUTU LUAR DAN DALAM

Perhatikan gambar di samping. Diketahui dua buah lingkaran masing-masing L1 dan L2 dengan jari-jari berurutan adalah r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$, sedangkan jarak antara titik pusat lingkaran itu adalah d. T_1T_2 disebut ruas garis singgung sekutu luar.



Keterangan:
d = jarak kedua pusat
P_1= pusat lingkaran 1
P_2= pusat lingkaran 2

Berapakah panjang ruas garis singgung sekutu luar yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut?

<u>Penyelesaian</u>:

Perhatikan ? T_1T_2Q siku-siku di T_1

$T_2Q = P_1P_2 = d$ dan $T_1Q = r_1 - r_2$

Dengan teorema Pythagoras didapat $T_1T_2 = \sqrt{(T_2Q)^2 ? (T_1Q)^2}$

$$T_1T_2 = \sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$$

Panjang garis singgung sekutu luar antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$, serta jarak antara kedua pusat = d adalah $\sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$

<u>Contoh 13</u>

Tentukan panjang garis singgung sekutu luar antara lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 4 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 10x + 14y - 10 = 0$.

Penyelesaian

Lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$ pusatnya di (1,-5) dan jari-jarinya 5

Lingkaran $x^2 + y^2 + 12x + 14y - 15 = 0$ pusatnya di (6,7) dan jari-jarinya 10

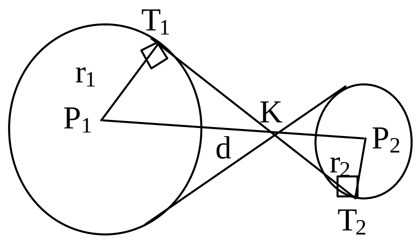
Jarak kedua pusat lengkaran = d = $\sqrt{(1 ? 6)^2 ? (?5 ? 7)^2}$

$$d = \sqrt{(?5)^2 ? (?12)^2}$$

$$d = 13$$

Panjang garis singgung sekutu luar adalah $\sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$

$= \sqrt{(13)^2 ? (10 ? 5)^2} = \sqrt{169 ? 25} = \sqrt{144} = 12$



Perhatikan gambar di samping. Diketahui dua buah lingkaran masing-masing L1 dan L2 dengan jari-jari berurutan adalah r_1 dan r_2, sedangkan jarak antara titik pusat lingkaran itu adalah d. T_1T_2 disebut garis singgung sekutu dalam.

Keterangan:
d = jarak kedua pusat
P_1= pusat lingkaran 1
P_2= pusat lingkaran 2

Berapakah panjang ruas garis singgung sekutu dalam yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut?

Penyelesaian:

Buat garis melalui titik P_2 sejajar $\overline{T_1T_2}$ yaitu $\overline{P_2R}$

Buat garis melalui titik P_1 sejajar $\overline{T_1T_2}$ yaitu $\overline{P_1Q}$

Pandang segi-4 P_1QP_2R;

$\overline{T_1T_2}$? $\overline{P_2Q}$ dan $\overline{T_1T_2}$? $\overline{P_1R}$ maka $\overline{P_2Q}$ // $\overline{P_1R}$ ....(1)

$\overline{T_1T_2}$ // $\overline{P_2R}$ dan $\overline{T_1T_2}$ // $\overline{P_2Q}$ maka $\overline{P_2R}$ // $\overline{P_2Q}$ ....(2)

besar ? P_1QP_2 = besar ? P_1QP_2 = 90^0 (sehadap) ....(3)

Dari (1),(2), dan (3) dapat disimpulkan bahwa segi-4 P_1QP_2R adalah persegi panjang.

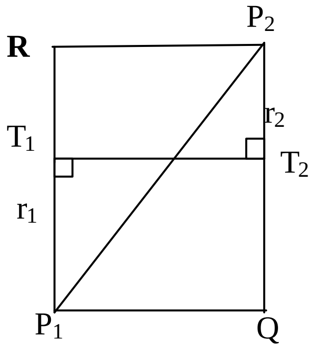
Pandang ? $P_1Q\ P_2$ siku-siku di Q. maka berlaku teorema phytagoras

$(P_1P_2)^2 = (P_1Q)^2 + (QP_2)^2$

$(P_1P_2)^2 = (T_1T_2)^2 + (r_1 + r_2)^2$

$(d)^2 = (T_1T_2)^2 + (r_1 + r_2)^2$

$T_1T_2 = \sqrt{(d)^2 \ ?\ (r_1 \ ?\ r_2)^2}$



Panjang garis singgung sekutu dalam antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2, serta jarak antara kedua pusat d adalah $\sqrt{(d)^2 \ ?\ (r_1 \ ?\ r_2)^2}$

Contoh 14

Tentukan panjang garis singgung sekutu luar antara lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ dan $x^2 + y^2 - 12x - 20y + 132 = 0$.

Penyelesaian

Lingkaran pusatnya $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$ di (1,-2) dan jari-jarinya 1

Lingkaran $x^2 + y^2 + 12x + 14y - 15 = 0$ pusatnya di (6,10) dan jari-jarinya 2

Jarak kedua pusat lengkaran = d = $\sqrt{(1 ? 6)^2 \ ?\ (?2 ? 10)^2}$

$$d = \sqrt{(?5)^2 \ ?\ (?12)^2} = 13$$

Panjang garis singgung sekutu dalam adalah $\sqrt{(d)^2 \ ?\ (r_1 \ ?\ r_2)^2}$

$$= \sqrt{(13)^2 \ ?\ (1 ? 2)^2}$$

$$= \sqrt{169 ? 9}$$

$$= \sqrt{160}$$

c. Rangkuman Kegiatan 1

a. $x^2 + y^2 = r^2$ merupakan persamaan lingkaran yang pusatnya O(0,0) dan jari-jari r

b. $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$ merupakan persamaan lingkaran pusat (a,b) dengan jari-jari r

c. Bentuk umum persamaan ingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat di $(?\frac{1}{2}A, ?\frac{1}{2}B)$ dan jari-jari r = $\sqrt{(?\frac{1}{2}A)^2 ? (?\frac{1}{2}B)^2 ? C}$

d. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y = mx \underline{?} r\sqrt{1 ? m^2}$

e. Persamaan garis singgung pada lingkaran $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$ dengan gradien m adalah $y - b = m(x – a) \underline{?} r\sqrt{1 ? m^2}$

f. Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1,y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$

g. Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1,y_1) pada lingkaran $(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$ adalah $(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$

h. Persamaan garis singgung dengan titik singgung (x_1,y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, adalah $x_1x + y_1y + \frac{1}{2}A(x + x_1) + \frac{1}{2}B(y + y_1) + C = 0$

i. Panjang garis singgung sekutu luar antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2 dengan $r_1 > r_2$, serta jarak antara kedua pusat = d adalah $\sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$

j. Panjang garis singgung sekutu dalam antara dua lingkaran yang jari-jarinya r_1 dan r_2, serta jarak antara kedua pusat d adalah $\sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$

d. Tugas

Agar anda memahami materi-materi dalam kegiatan belajar ini, kerjakan soal-soal latihan berikut ini.

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan syarat:
   a) bertitik pusat di P(3,-4) dan melalui O(0,0)
   b) melalui titik–titk K(3,1) dan L(-1,3) dan titik pusatnya terletak pada garis 3x-y-2=0.
2. Tentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran dengan persamaan
   $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.
3. Tentukan persamaan lingkaran melalui titik K(1,1), L(1,-1) dan M(2,0)
4. Tentukan harga k, agar garis y = kx dan lingkaran $x^2 + y^2 -10x + 16 = 0$
   a) berpotongan di dua titik
   b) bersinggungan
   c) tidak berpotongan
5. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui titik O(0,0) pada lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$
6. Diketahui dua buah roda yang jarak kedua As adalah 78 cm, roda pertama jari-jarinya 50 cm dan roda kedua 20 cm. Pada kedua roda dipasang rantai. Tentukan panjang rantai yang tidak menempel di roda.

d. Kunci Jawaban Tugas

Apabila anda menemui kesulitan dalam menyelesaikan soal latihan, anda dapat mengikuti petunjuk berikut ini. Jika anda bisa menjawabnya, cocokanlah jawaban anda dengan kunci berikut ini.

1. a) Persamaan lingkaran dengan pusat P(3,-4) dan melalui O(0,0) adalah $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$. Jarak OP sebagai jari-jari
   b) Misalkan persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 + Ax \;\; By + C = 0$, dimana pusat lingkaran $P(?\frac{1}{2}A, ?\frac{1}{2}B)$. Koordinat-koordinat titik K dan L disubstitusikan pada persamaan lingkaran dan koordinat P

disubstitusikan pada garis $3x - y - 2=0$. Sehingga diperoleh sistem persamaan linier yang terdiri atas 3 persamaan dan 3 variabel yaitu A, B, dan C. Selesaikan sistem persamaan itu dengan substitusi dan/atau eliminasi didapat A = -4, B = -8 dan C = 10.

Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$.

2. Persamaan lingkaran tersebut dapat diubah menjadi

   $(x + \frac{5}{2})^2 + (y + 4)^2 = \frac{25}{4}$, jadi pusatnya $(-\frac{5}{2}, -1)$ dan jari-jarinya $\frac{5}{2}$

3. Misalkan persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 + Ax \quad By + C = 0$. Substitusikan koordinat titik P, Q, dan R pada persamaan lingkaran, sehingga diperoleh sistem persamaan linier yang terdiri atas 3 persamaan dan 3 variabel yaitu A, B, dan C. Selesaikan sistem persamaan itu dengan substitusi dan/atau eliminasi didapat A = -2, B = 0 dan C = 0.

   Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - 2x = 0$

4. Misalkan garis dan lingkaran berpotonganmaka didapat persamaan kuadrat dalam x, yaitu $x^2 + k^2 x^2 - 10x + 16 = 0$

   $(1 + k^2) x^2 - 10x + 16 = 0$, diskriminan dari persamaan ini adalah D = $(6-8k)(6 + 8k)$.

   Garis dan lingkaran akan:

   a) berpotongan, jika D>0, didapat $-\frac{3}{4} < k < \frac{3}{4}$

   b) bersinggungan, jika D = 0, didapat $k = -\frac{3}{4}$ atau $k = \frac{3}{4}$

   c) tidak berpotongan, jika D<0, didapat $k < -\frac{3}{4}$ atau $k > \frac{3}{4}$

5. Perhatikan titik O(0,0) terletak diluar lingkaran. Mengapa? Misalkan garis singgung yang dicari menyinggung lingkaran di titik S(a,b), maka persamaan garis singgungnya adalah

   $ax + by - \quad 3(x + a) - (y + b) + 8 = 0$

   $(a - 3)x + (b - 1)y - 3a - b + 8 = 0$

Garis singgung ini melalui (0,0), maka –3a –b +8=0

$b = 8 - 3a$ .... (1)

S (a,b) pada lingkaran, maka $a^2 + b^2 - 6a - 2b + 8 = 0$ .... (2)

Substitusi (1) pada (2) didapat $a^2 + (8 - 3a)^2 - 6a - 2(8 - 3a) + 8 = 0$

$a^2 + 64 - 48a + 9a^2 - 6a - 16 + 6a + 8 = 0$

$10a^2 - 48a + 56 = 0$

$(2a - 4)(5a - 14) = 0$

$a = 2$ atau $a = \frac{14}{5}$, akibatnya $b = 2$ atau $b = -\frac{2}{5}$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = x$ atau $x + 7y = 0$

6. Panjang rantai yang tidak menempel di roda merupakan panjang garis singgung luar.

Panjang rantai = $\sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$

$= \sqrt{(78)^2 ? (30)^2}$

= 60 cm

e. Tes Formatif

1. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik (3,4), (5,0) dan (0,5).
2. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ yang melalui titik (6,8)
3. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ dan apa keistimewaan dari lingkaran ini?
4. Tentukan panjang garis singgung persekutuan luar antara lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$

f. Kunci Jawaban Tes Formatif

1. Misal persamaan lingkaran yang melalui titik (3,4), (5,0) dan (-5,0), adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

   Titik (3,4) pada lingkaran: 9+16 + 3A + 4B + C= 0 atau 3A + 4B + C=-25

   Titik (5,0) pada lingkaran: 25+0 + 5A + 0 + C= 0 atau 5A + C= -25

   Titik (0,5) pada lingkaran: 25+0 – 5A + 0 + C= 0 atau –5A + C= -25.

   Dari tiga persamaan di atas didapat A = 0, B= 0 dan C = -25

   Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - 25 = 0$

2. Titik (6,8) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 10$

   Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 100$ yang melalui titik (6,8) adalah 6x + 8y = 100 atau 3x + 4y = 50

3. Persamaan $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ dapat diubah menjadi

   $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$

   $x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16 + 9$

   $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$

   Jadi pusat (-4, 3) dan jari-jari = 5

   Anda dapat juga menggunakan cara lain.

4. Lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ pusatnya (0,0) dan jari-jarinya 2

   $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$ pusatnya (10, 0) dan jari-jarinya 8

   Jarak kedua pusat = 10

   Panjang garis singgung luar = $\sqrt{(d)^2 ? (r_1 ? r_2)^2}$

   $= \sqrt{(10)^2 ? (8 ? 2)^2}$

   = 8

2. Kegiatan Belajar 2: Ellips

a. Tujuan Kegiatan Belajar 2

Setelah mempelajari kegiatan belajar 2 ini, diharapkan anda dapat:

- ? Memahami unsur-unsur ellips
- ? Menentukan persamaan ellips jika pusat dan jari-jarinya diketahaui.
- ? Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ellips.

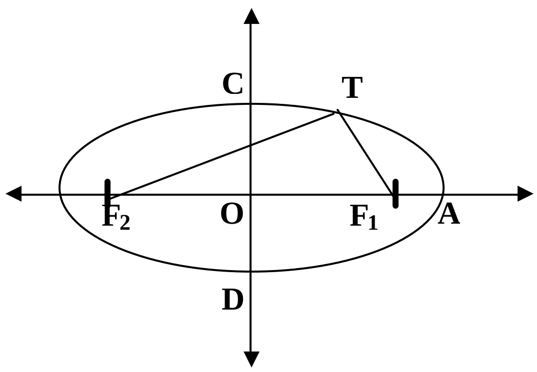
b. Uraian Materi Kegiatan Belajar 2

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai dua sumbu simetri adalah Ellips. Buatlah model kerucut dari kertas manila, kemudian potong menurut bidang tidak sejajar bidang alas tetapi tidak memotong bidang alas kerucut. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang terpotong? Permukaan kerucut yang terpotong berbentuk ellips.

Dalam matematika ellips didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya. Selanjutnya dua titik itu disebut *Titik Fokus Ellips*.

UNSUR-UNSUR ELLIPS

Perhatikan gambar ellips berikut ini:



<u>Keterangan:</u>

Titik O disebut koordinat titik pusat ellips

Titik A, B, C dan D disebut koordinat titik-titik puncak ellips

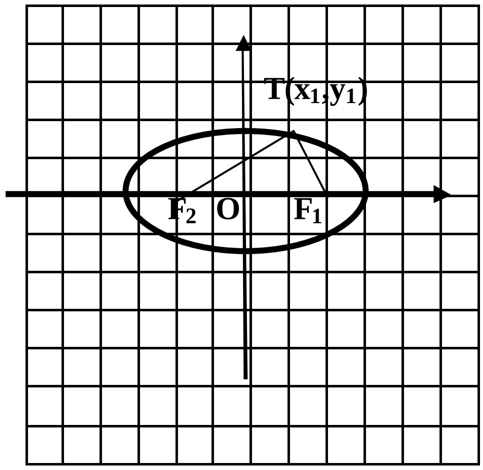
Titik F_1 dan F_2 disebut koordinat titik-titik fokus ellips

$\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ berturut-turut disebut sumbu mayor (sumbu panjang) dan sumbu minor (sumbu pendek)

$AB = TF_1 + TF_2$

PERSAMAAN ELLIPS DENGAN PUSAT DI O(0,0)

Misalkan F_1F_2 = 2c , merupakan jarak antara dua titik fokus. Maka $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$. Misalkan jumlah jarak yang tetap itu adalah 2a.



Ambil sebarang titik pada ellips misal $T(x_1 ,y_1)$ dan titik O sebagai pusat ellips.

Berdasarkan definisi ellips, yaitu:

$TF_1 + TF_2 = 2a$

? $\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$ + $\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$ = 2a

? $\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$ = 2a - $\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$, jika kedua ruas dikuadratkan didapat

$(x_1-c)^2 + y_1^2 = 4a^2 + (x_1+ c)^2 + y_1^2 - 4a\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$

? $(x_1^2 - 2x_1c + c^2) + y_1^2 = 4a^2 + (x_1^2 + 2x_1c + c) + c^2 -$
$4a\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$

? $-4x_1c - 4a^2 = -4a\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$, jika kedua ruas dibagi -4 didapat

? $(x_1c + a^2)^2 = a^2 \{(x_1+ c)^2 + y_1^2\}$, jika kedua ruas dikuadratkan didapat

? $x_1^2c^2 + a^4 + 2x_1ca^2 = a^2 (x_1^2 + 2x_1c + c^2) + a^2y_1^2$

? $a^2 (a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x_1^2 + a^2y_1^2$

Karena a > c maka $a^2 - c^2 > 0$ sehingga kita dapat memisalkan $\mathbf{a^2 - c^2 = b^2}$ sehingga persamaan di atas menjadi

? $b^2 x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2 b^2$

? $\frac{x_1^2}{a^2} ? \frac{y_1^2}{b^2} ? 1$

Karena $T(x_1,y_1)$ adalah titik yang diambil, maka setiap titik itu memenuhi:

$\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ dan $\frac{c}{a}$ disebut ***eksentrisitas numerik*** dan ditulis e. Karena a>c maka $0 < e < 1$.

Persamaan ellips dengan pusat di O(0,0) adalah $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$

Contoh 1

Tentukan persamaan ellips yang berpusat di O(0,0) dengan sumbu panjang dan sumbu pendek berturut-turut:

a. 8 dan 6 b. 4 dan 2

Penyelesaian

a. Sumbu panjang = 8, berarti a = 4. Sumbu pendek = 6, berarti b = 3

Jadi persamaan ellipsnya adalah $\frac{x^2}{4^2} ? \frac{y^2}{3^2} ? 1$

atau $\frac{x^2}{16} ? \frac{y^2}{9} ? 1$

b. Sumbu panjang = 4, berarti a = 2. Sumbu pendek = 2, berarti b = 1

Jadi persamaan ellipsnya adalah $\frac{x^2}{2^2} ? \frac{y^2}{1^2} ? 1$

atau $\frac{x^2}{4} ? \frac{y^2}{1} ? 1$

Contoh 2

Tentukan persamaan ellips yang titik apinya terletak pada sumbu x, simetri terhadap titik O, sumbu panjangnya 20 dan eksentrisitas numerik e = $\frac{3}{5}$.

Penyelesaian

Sumbu panjang 2a = 20, berarti a = 10

e = $\frac{3}{5}$, berarti $\frac{c}{a}$ = $\frac{3}{5}$. Karena a = 10, dengan demikian c =6

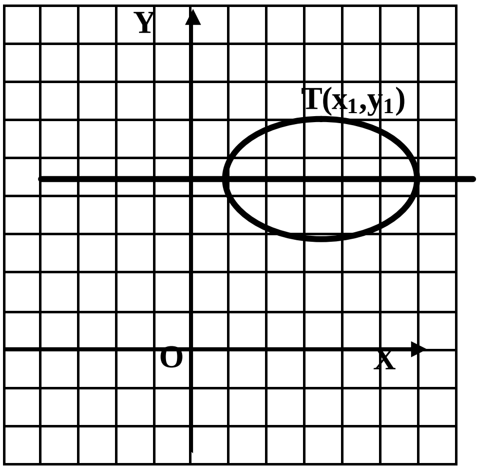
$a^2 – c^2 = b^2$

b^2 = 100 – 36 atau b^2 = 64

b = 8, mengapa –8 tidak digunakan?

Jadi persamaan ellips adalah $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{64} ? 1$

PERSAMAAN ELLIPS DENGAN PUSAT TIDAK PADA (0,0)



Dengan cara yang sama, ambil sebarang titik pada lingkaran misal T(x_1 ,y_1) dan titik P(? , ?) sebagai pusat ellips, maka akan didapat persamaan ellips yaitu:

$$\boxed{\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1}$$

Coba anda turunkan asal rumus ini.

Contoh 3

Tentukan persamaan ellips yang berpusat di (3 , -2) dengan sumbu panjang dan sumbu pendek berturut-turut 6 dan 4.

Penyelesaian

Sumbu panjang = 6, berarti a = 3

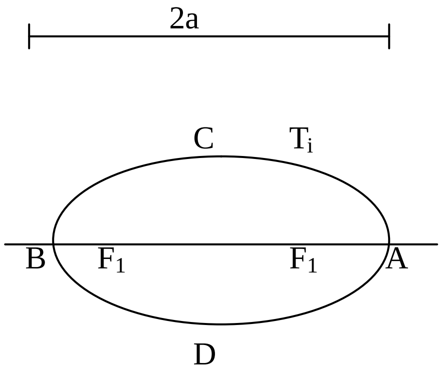
Sumbu pendek = 4, berarti b = 2

Jadi persamaan ellipsnya adalah $\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1$

$$? \quad \frac{(x ? 3)^2}{3^2} ? \frac{(y ? 2)^2}{2^2} ? 1$$

$$? \quad \frac{(x ? 3)^2}{9} ? \frac{(y ? 2)^2}{4} ? 1$$

SKETSA ELLIPS



Dapatkah anda membuat gambar ellips? Buatlah dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Gambarlah di bukumu titik F_1, F_2 dan panjang $2a > F_1F_2$. Tentukan titik A dan B pada perpanjangan garis F_1F_2 sedemikian hingga $F_2B = F_1A$ dan $AB = 2a$
2. $F_2B = F_1A = (2a - F_1F_2)$
3. Titik T_i diperoleh sebagai berikut:
   a) Buat lingkaran dengan pusat F_1 dan jari-jari $r_i > F_1A$
   b) Dari B busurkan lingkaran dengan jari-jari $2a - r_i$
   c) Perpotongan lingkaran pada langkah (a) dan (b) adalah titik T_i.
   d) Lakukan langkah yang sama dengan mengganti peran F_1 dengan F_2 dan sebaliknya. Akan didapat titik-titik C dan D yang memenuhi definisi ellips. Hubungkan titik-titik itu dengan kurva mulus akan didapat sketsa ellips

Bermain

Sediakan 2 paku pines, kapur tulis atau spidol papan dan tali secukupnya. Tancapkan 2 paku pines pada papan. Gunting tali dengan panjang lebih dari jarak kedua pines. Ikat ujung tali pada masing-masing pines (tali pada posisi kendor). Ambil kapur tulis atau spidol papan dan letakkan menempel tali pada posisi bagian dalam tali dan pines. Gerakan kapur atau spidol menelusuri tali maka akan tergambar ellips. Silahkan mencoba!

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG ELLIPS

Garis singgung ellips adalah suatu garis yang memotong ellips tepat pada satu titik.

a. Gradien diketahui

Misal persamaan garis singgung: $y = mx + k$

Sehingga ada satu titik pada ellips: $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ yang memenuhi persamaan garis singgung di atas. Akibatnya:

$$\frac{x^2}{a^2} ? \frac{(mx ? k)^2}{b^2} ? 1$$

? $b^2x^2 + a^2 (mx + k)^2 = a^2b^2$; jika kedua ruas dikalikan a^2b^2 didapat

? $b^2 x^2 + a^2 (m^2x^2 + k^2 + 2mkx) = a^2b^2$

? $(b^2 + a^2 m^2)x^2 + a^2k^2 + 2a^2mkx - a^2b^2 = 0$

? $(b^2 + a^2 m^2)x^2 + 2a^2mkx + a^2(k^2 - b^2) = 0$

Garis akan menyinggung ellips, jika titik-titik potong berimpit atau memotong di satu titik. Hal ini terjadi apabila persamaan kuadrat di atas mempunyai dua akar yang sama atau apabila diskriminannya sama dengan nol.

$D = 0$

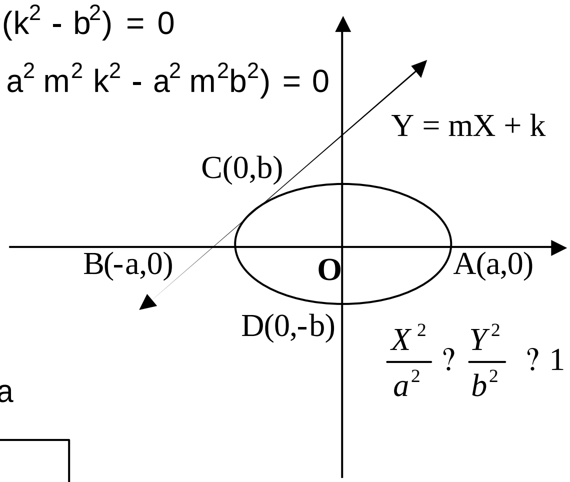
$(2a^2mk)^2 – 4. (b^2 + a^2 m^2). a^2(k^2 - b^2) = 0$

? $(4a^4m^2k^2) – 4a^2.(b^2 k^2 – b^4 + a^2 m^2 k^2 - a^2 m^2b^2) = 0$

? $b^2 k^2 - (b^2 + a^2 m^2)b^2 = 0$

? $k^2 - (b^2 + a^2 m^2) = 0$

? $k = \underline{?} \sqrt{b^2 ? a^2m^2}$



Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$\boxed{\mathbf{y = mx}\ \underline{?}\ \sqrt{b^2 ? a^2m^2}}$$

Contoh 4

Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{16} ? \frac{y^2}{9} ? 1$, jika garis singgung itu membentuk sudut 45^o dengan sumbu x positip.

Penyelesaian

Garis singgung itu membentuk sudut 45^o dengan sumbu x positip berarti gradien m = tg 45^o = 1.

Persamaan garis singgungnya $y = mx \underline{?} \sqrt{b^2 ? a^2m^2}$

$y = 1.\ x \underline{?} \sqrt{3^2 ? 4^2.1^2}$

$y = x \underline{?} 5$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah y = x + 5 atau y = x – 5

Contoh 5

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $x^2 + 4y^2 = 20$ yang tegak lurus ke garis 2x – 2y –13 = 0.

Penyelesaian

2x – 2y –13 = 0

y = (2x –13)/2

$y = x - \frac{13}{2}$

Jadi gradien garis 2x – 2y –13 = 0 adalah $m_1 = 1$. Karena garis singgung tegak lurus garis 2x – 2y –13 = 0, maka gradien garis singgung:

$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1$.

Persamaan ellips $x^2 + 4y^2 = 20$ dapat diubah menjadi $\frac{x^2}{20} ? \frac{y^2}{5} ? 1$ dengan membagi kedua ruas dengan 20.

Persamaan garis singgungnya adalah $y = mx \underline{?} \sqrt{b^2 ? a^2m^2}$

$y = -1.\ x \underline{?} \sqrt{5 ? 20}$

$y = -x \underline{?} 5$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah y + x - 5= 0 atau y + x + 5= 0

GARIS SINGGUNG UNTUK LINGKARAN YANG TIDAK BERPUSAT DI (0,0)

Dengan cara yang serupa dengan di atas dapat ditemukan persamaan garis singgung lingkaran yang tidak berpusat di (0,0) misal di (? , ?) yaitu

$$\boxed{y - ? = m(x - ?) \; \underline{?} \; \sqrt{b^2 \; ? \; a^2m^2}}$$

<u>Contoh 6</u>

Tentukan persmaan garis singgung pada ellips $\frac{(x ? 3)^2}{16} ? \frac{(y ? 2)^2}{9} ? 1$, jika garis singgung itu membentuk sudut 135^o dengan sumbu x positip.

<u>Penyelesaian</u>

Garis singgung itu membentuk sudut 135^o dengan sumbu x positip berarti gradien m = tg 135^o = -1.

Persamaan garis singgungnya $y - ? = m(x - ?) \; \underline{?} \; \sqrt{b^2 \; ? \; a^2m^2}$

$$y + 2 = -1(x - 3) \; \underline{?} \; \sqrt{3^2 \; ? \; 4^2(?1)^2}$$

$$y + 2 = -x + 3 \; \underline{?} \; 5$$

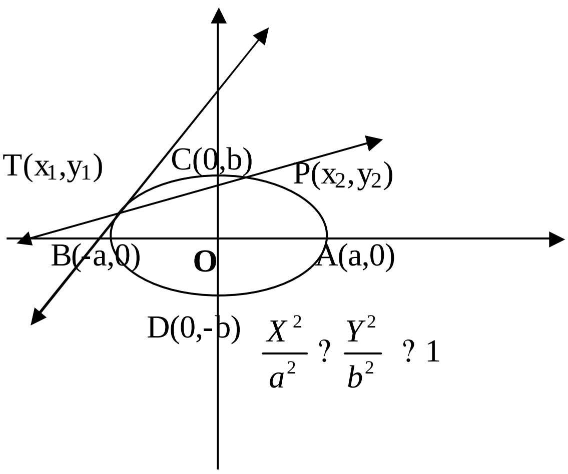
Jadi persamaan garis singgungnya adalah y + x = 6 atau y + x + 4 = 0

b. Titik singgungnya diketahui

Misal titik singgungnya di T (x_1,y_1) dan P (x_2,y_2) suatu titik pada ellips, sedangkan persamaan ellips: $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ maka berlaku:

$\frac{x_1^{\;2}}{a^2} ? \frac{y_1^{\;2}}{b^2} ? 1$..............................(1) dan

$\frac{x_2^{\;2}}{a^2} ? \frac{y_2^{\;2}}{b^2} ? 1$..............................(2)



Dari persamaan (1) dan (2) didapat:

$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2$

$b^2 (x_1^2 - x_2^2) \;=\; -a^2 (y_1^2 - y_2^2)$

$b^2 (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) \;=\; -a^2 (y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$

$$\frac{-b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

Karena persamaan garis yang melalui titik Tdan P adalah:

$y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, substitusi (3) pada persamaan ini didapat

$$y - y_1 = \frac{-b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)} (x - x_1) \;;$$

Jika P mendekati T sedemikian P sangat dekat dengan T, maka hampir $x_2 = x_1$ dan $y_2 = y_1$, dimana TP = 0.

$$y - y_1 = \frac{-b^2 (2x_1)}{a^2 (2y_1)} (x - x_1)$$

$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 + b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 = 0$; kedua ruas dikalikan a^2

$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x - (a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2) = 0$

$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x - a^2 b^2 = 0$

$a^2 y_1 y + b^2 x_1 x = a^2 b^2$

$\dfrac{x_1 X}{a^2} + \dfrac{y_1 Y}{b^2} = 1$; kedua ruas dibagi $a^2 b^2$

Jadi persamaan garis singgung di titik singgung (x_1, y_1) adalah:

$$\boxed{\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1}$$

Contoh 7

Carilah persamaan garis singgung pada ellips $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ di titik yang absisnya 5.

Penyelesaian

Titik-titik pada ellips yang absisnya 5, ordinatnya diperoleh dari

$$\frac{25}{30} ? \frac{y^2}{24} ? 1$$

$y^2 = 4$

$y = \underline{?}\ 2$

Jadi titik singgungnya P(5,2) dan Q(5, -2)

Persamaan garis singgung di P adalah $\frac{5x}{30} ? \frac{2y}{24} ? 1$

Persamaan garis singgung di Q adalah $\frac{5x}{30} ? \frac{2y}{24} ? 1$

Garis singgung ellips yang tidak berpusat di $(? , ?)$

Dengan cara yang sama seperti di atas, untuk ellips $\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1$, maka persamaan garis singgung di titik singgung (x_1, y_1) adalah:

$$\boxed{\frac{(x_1 ? ?)(x ? ?)}{a^2} ? \frac{(y_1 ? ?)(y ? ?)}{b^2} ? 1}$$

Contoh 8

<u>Carilah persamaan garis singgung pada ellips</u> $\frac{(x ? 2)^2}{20} ? \frac{(y ? 3)^2}{5} ? 1$ di titik yang ordinatnya –2.

<u>Penyelesaian</u>

Titik-titik pada ellips yang ordinatnya –2, diperoleh absis

$$\frac{(x ? 2)^2}{20} ? \frac{(?2 ? 3)^2}{5} ? 1$$

$\frac{(x ? 2)^2}{20} ? \frac{1}{5} ? 1$, kedua ruas dikalikan 20 didapat

$(x – 2)^2 + 4 = 20$

$x^2 – 4x + 4 + 4 = 20$

$x^2 – 4x –12 = 0$

(x –6)(x + 2) = 0

x = 6 atau x = -2

Jadi titik singgungnya A(6, -2) dan B (-2,-2)

Persamaan garis singgung di A = $\frac{(6 ? 2)(x ? 2)}{20} ? \frac{(? 2 ? 3)(y ? 3)}{5} ? 1$

$\frac{4(x ? 2)}{20} ? \frac{(y ? 3)}{5} ? 1$, jika kedua ruas dikalikan 20 didapat

4(x – 2) + 4(y + 3) = 20

4x + 4y = 16

x + y = 4

Persamaan garis singgung di A= $\frac{(6 ? 2)(x ? 2)}{20} ? \frac{(? 2 ? 3)(y ? 3)}{5} ? 1$

$\frac{4(x ? 2)}{20} ? \frac{(y ? 3)}{5} ? 1$, jika kedua ruas dikalikan 20 didapat

4(x – 2) + 4(y + 3) = 20

4x + 4y = 16

x + y = 4

Persamaan garis singgung di B adalah

$$\frac{(? 2 ? 2)(x ? 2)}{20} ? \frac{(? 2 ? 3)(y ? 3)}{5} ? 1$$

$\frac{? 4(x ? 2)}{20} ? \frac{(y ? 3)}{5} ? 1$, jika kedua ruas dikalikan 20 didapat

-4(x – 2) + 4(y + 3) = 20

-4x + 4y = 0

x + y = 0

C. Rankuman Kegiatan 2

☞ **Persamaan ellips dengan pusat di O(0,0) adalah** $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$

☞ **P**arsamaan ellips melalui titik T(x_1 ,y_1) dan pusatnya di titik P(? , ?) adalah

$$\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1$$

c. Persamaan garis singgungnya m pada ellips adalah $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ adalah

y = mx $\underline{?}$ $\sqrt{b^2 ? a^2m^2}$

d. persamaan garis singgung lingkaran yang tidak berpusat di (0,0) misal di (? , ?) yaitu y- ? = m(x- ?) $\underline{?}$ $\sqrt{b^2 ? a^2m^2}$

e. persamaan garis singgung di titik singgung (x_1,y_1) pada ellips adalah $\frac{x_1x}{a^2} ? \frac{y_1y}{b^2} ? 1$

f. Persamaan garis singgung di titik (x_1,y_1) pada ellips

$\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1$, adalah

$$\frac{(x_1 ? ?)(x ? ?)}{a^2} ? \frac{(y_1 ? ?)(y ? ?)}{b^2} ? 1$$

d. Tugas

Agar anda memahami materi ellips ini, kerjakan soal-soal berikut secara mandiri.

1. Tentukan persamaan ellips yang titik apinya terletak pada sumbu x dan simetris terhadap O yang memenuhi syarat jarak kedua titik apinya adalah 4 dan jarak kedua garis arah arahnya adalah 5.
2. Tentukan koordinat titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$.
3. Tentukan persamaan ellips yang eksentrisitas numeriknya e = $\frac{2}{3}$ salah satu titik apinya F(6,0).
4. Tentukan nilai m sehingga garis y = -x +m menyinggung ellips $\frac{x^2}{20} ? \frac{y^2}{5} ? 1$.

d. Kunci Jawaban Tugas

Apabila anda menemui kesulitan untuk menyelesaikan soal-soal di atas, petunjuk dapat mengikuti petunjuk penyelesaian.

1. Jarak kedua titik api adalah 2c = 4, berarti c=2. karena jarak kedua garis arahnya adalah 2 $\frac{a^2}{c}$ =5 maka a^2 = $\frac{5}{2}c$ dan karena c=2 maka a^2 = $\frac{5}{2} ?2 ? 5$

   Pada ellips berlaku $b^2 = a^2 - c^2$, maka $b^2 = 5 - 4 = 1$

   Karena titik-titik api ellips terletak pada sumbu x dan simetris terhadap O maka persamaan ellips berbentuk $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ jadi persamaan ellips yang ditanyakan adalah $\frac{x^2}{5} ? \frac{y^2}{1} ? 1$

2. Persamaan ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$ berarti a = 10 dan b=6

   Pada ellips berlaku $b^2 = a^2 - c^2$, dengan demikian c = 8, ini berarti koordinat titik api $F_1(8,0)$ dan $F_2(-8,0)$

3. Eksentrisitas numeriknya e = $\frac{2}{3}$ = $\frac{c}{a}$. Karena c = 6, maka a = 9

   $a^2 – c^2 = b^2$

   $b^2 = 81 – 36$ atau $b^2 = 45$

   b = $\sqrt{45}$, mengapa – $\sqrt{45}$ tidak digunakan?

   Jadi persamaan ellips adalah $\frac{x^2}{81} ? \frac{y^2}{45} ? \quad 1$

4. Gradien garis y = -x + p adalah -1

   Persamaan garis singgung dengan gradien –1 adalah

   y = -x $\underline{?}$ 5. Jadi p = 5

e. Tes Formatif

1. Tentukan garis arah dari ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$

2. Tentukan persamaan ellips dengan pusat (1,2) dan eksentrisitasnya $\frac{4}{5}$, sedangkan direktriknya 4x = 25

3. Tentukan panjang garis mayor, minor dan persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{50} ? \frac{y^2}{32} ? 1$ melalui titik (5, 4)

4. Buatlah sketsa ellips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$. Tentukan koordinat-kordinat titik fokus dan keempat puncaknya.

f. Kunci Tes Formatif

1. Dari ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$ didapat a= 10, b = 6 dan c = 8

   Persamaan garis arah x = $\frac{100}{8} = \frac{25}{2}$ dan x = - $\frac{100}{8} = -\frac{25}{2}$

2. Eksentrisitasnya $\frac{4}{5} = \frac{c}{a}$ atau c = $\frac{4}{5}$a

   Direktriknya 4x = 25 atau x = $\frac{25}{4}$, sedangkan x = $\frac{a^2}{c}$, dengan demikian didapat $\frac{a^2}{c} = \frac{25}{4}$ atau $a^2 = \frac{25}{4}$ c

   $a^2 = \frac{25}{4} . \frac{4}{5}$ a atau a = 5 dan c = 4, akibatnya b = 3

   Jadi persamaan ellipsnya adalah $\frac{(x ? 1)^2}{25} ? \frac{(y ? 2)^2}{9} ? 1$

3. Panjang garis mayor = $2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$

   Panjang minor = $2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$

Persamaan garis singgung pada ellips $\frac{x^2}{50} ? \frac{y^2}{32} ? 1$ melalui titik (5, 4) adalah $\frac{5x}{50} ? \frac{4y}{32} ? 1$

4. Ellips $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$ dapat diubah menjadi:

   $9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y - 164 = 0$

   $9(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) - 164 = 0$

   $9(x^2 - 4x + 4) + 25(y^2 + 2y + 1) - 164 = 36 + 25$

   $-9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225$, kedua ruas dibagi dengan 225 didapat

   $\frac{(x ? 2)^2}{25} + \frac{(y ? 1)^2}{9} = 1$. Dari persamaan ini a = 5, b = 3 dan c = 4

   Koordinat-kordinat titik fokus adalah (6, -1) dan (-2, -1) dan koordinat keempat puncaknya adalah (7, -1), (-3,-1), 2, 2) dan (2, -4). Anda dapat membuat sketsa dari hasil jawaban ini.

3. Kegiatan Belajar 3 : Parabola

a. Tujuan Kegiatan Belajar 3

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3 ini, diharapkan anda dapat:

? Memahami unsur-unsur parabola

? Menentukan persamaan parabola dan dapat menggambar grafiknya

? Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hiperbola.

b. Uraian Materi Kegiatan Belajar 3

Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai satu sumbu simetri adalah Parabola. Buatlah model kerucut dari kertas manila. Atau plastisin (sering disebut malam). Iris dengan bidang yang tegak lurus alas kerucut. Berbentuk apakah permukaan kerucut yang teriris? Permukaan kerucut yang teriris benbentuk parabola. Parabola diperoleh dengan mengiris bangun kerucut sejajar garis pelukisnya.

Dalam matematika parabola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang memiliki jarak tetap terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu pula. Selanjutnya titik itu disebut *fokus parabola*, sedangkan garis itu disebut *garis arah* atau ? *direktriks.* Parabola dapat dilukis jika diketahui garis arah dan titik fokus yang terletak pada suatu garis, di mana garis itu tegak lurus garis arah.

MENENTUKAN PERSAMAAN PARABOLA

Ambil sebarang titik pada parabola misal $T(x_1, y_1)$ dan titik O sebagai puncak parabola. Tarik garis melalui T tegak lurus garis arah yang diketahui misal di P. Hubungkan garis melalui titik T dan F. Berdasarkan definisi parabola: TF = TP. Pandang ? TQF.

? TQF merupakan segitiga siku-siku,

dimana membentuk sudut siku-siku di titik Q. Sehingga berlaku teorema phytagoras:

$QT^2 + QF^2 = TF^2$

$\sqrt{QT^2 + QF^2}$ = TF = TP

$\sqrt{QT^2 + QF^2} = \left(x + \frac{1}{2}P\right)$

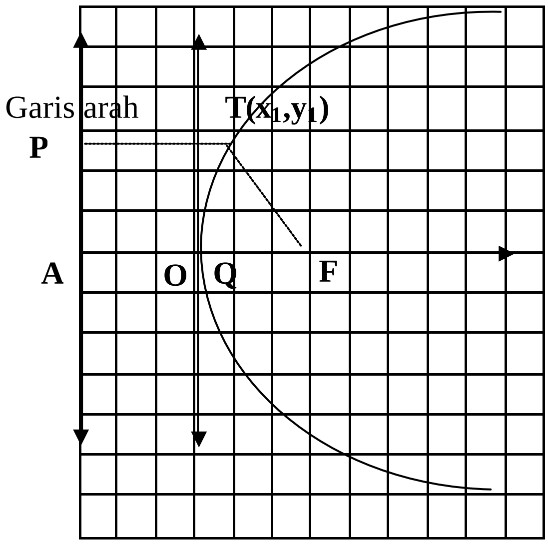
$\left(\sqrt{QT^2 + QF^2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}P\right)^2$

$QT^2 + QF^2 = (x + \frac{1}{2}P)^2$

$y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2 = (x + \frac{1}{2}P)^2$

$y^2 + x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$

$y^2 = 2px$



<u>Keterangan:</u>
Titik F disebut titik api, koordinatnya $F(\frac{1}{2}p, 0)$

Titik O disebut puncak parabola

Garis $x = -\frac{1}{2}p$ disebut garis arah atau Direktriks

Sumbu x; sumbu simetri dari parabola.

Persamaan parabola yang puncaknya O(0,0) dan sumbu simetrinya sumbu x adalah $y^2 = 2px$

Contoh 1

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di O, sumbu simetrinya berimpit dengan sumbu x dan parabola terletak di kanan sumbu y dan melalui titik (1,2)

Penyelesaian

Misal persamaan parabolanya $y^2 = 2px$ (karena terletak di setengah bidang bagian kiri). Titik ((1,2) pada parabola berarti 4 = 2p atau p = 2

Jadi persamaan parabolanya adalah $y^2 = 4x$

Contoh 2

Tentukan persamaan parabola puncaknya di (0,0) dan koordinat titik apinya F(4,0).

Penyelesaian

Misal persamaan parabolanya $y^2 = 2px$

Koordinat titik apinya F(4,0), berarti $\frac{1}{2}p = 4$ atau $p = 8$

Jadi persamaan parabolanya adalah $y^2 = 16x$

Contoh 3

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di (0,0), sumbu simetrinya sumbu x dan persamaan garis arahnya $x + 5 = 0$

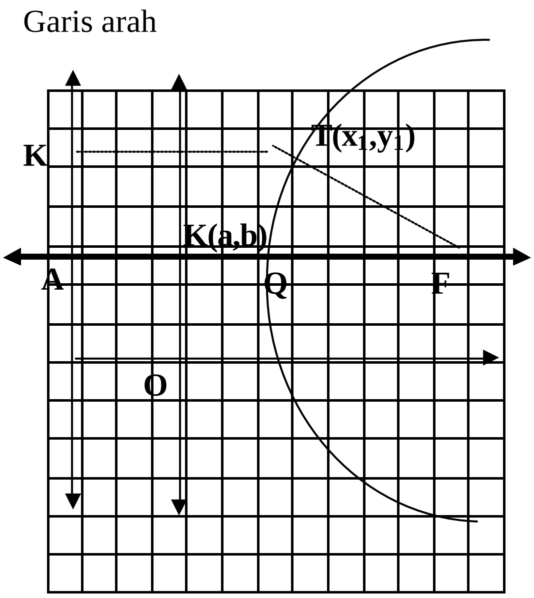
Penyelesaian

Misal persamaan parabolanya $y^2 = 2px$

Persamaan garis arahnya $x + 5 = 0$ berarti $\frac{1}{2}p = 5$ atau $p = 10$

Jadi persamaan parabolanya adalah $y^2 = 20x$

PERSAMAAN PARABOLA PUSATNYA PADA (a,b)



Ambil sebarang titik pada parabola misal $T(x_1, y_1)$ dan titik P(a,b) sebagai puncak parabola.

Tarik garis melalui T tegak lurus garis arah yang diketahui misal di K.

Hubungkan garis melalui titik T dan F.

Berdasarkan definisi parabola: TF = TK.

Dengan menggunakan cara yang sama seperti di atas, anda dapat menjabarkan bahwa persamaan parabola yang puncaknya P(a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$

Keterangan:

Titik F disebut titik api, kordinatnya $F(\frac{1}{2}p, b)$

Titik P (a,b) disebut puncak parabola

Garis $x = -\frac{1}{2}p + a$ disebut garis arah atau Direktriks

Persamaan parabola yang puncaknya P(a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$

Contoh 4

Tentukan persamaan parabola yang puncaknya di (3, 4) dan dan garis arahnya x = 1

Penyelesaian

Garis arahnya x = 1 berarti - $\frac{1}{2}$p + 3 = 1 atau $\frac{1}{2}$p = 2 atau p = 4

Jadi persamaan parabolanya adalah $(y-4)^2 = 8(x-3)$

PERSAMAAN GARIS SINGGUNG PARABOLA

Garis singgung parabola adalah suatu garis yang memotong parabola tepat pada satu titik.

a. Gradien diketahui

Misal persamaan garis singgung: y = mx + k

Sehingga ada satu titik pada parabola: $y^2 = 2px$ yang memenuhi persamaan garis singgung di atas. Akibatnya:

$$(mx + k)^2 = 2px$$

$$m^2x^2 + 2mkx + k^2 = 2px$$

$m^2x^2 + (2mk-2p)x + k^2 = 0$; merupakan persamaan kuadrat dalam variabel x. Agar persamaan kuadrat itu mempunyai satu harga x, maka harus terpenuhi syarat diskriminan dari persamaan itu sama dengan nol, yaitu:

$D = 0$

$(2mk-2p)^2 - 4.m^2k^2 = 0$

$4.(mk-p)^2 - 4.m^2k^2 = 0$

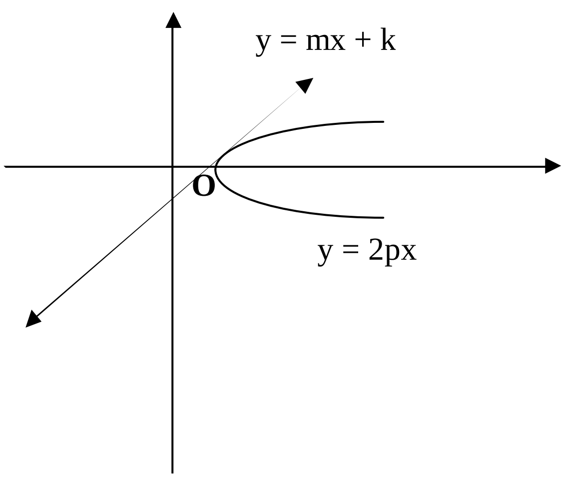
$(m^2k^2 - 2mkp + p^2) - 4m^2k^2 = 0$

$-8mkp + 4p^2 = 0$

$-2mkp + p^2 = 0$

$p(p - 2mk) = 0$

p = 0 atau p = 2mk, didapat $k = \frac{p}{2m}$



Jadi persamaan garis singgungnya adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

Persamaan garis singgung dengan gradien m pada parabola $y^2 = 2px$ adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

<u>Contoh 5</u>

Tentukan persamaan garis singgung dengan gradien 2 pada parabola $y^2 = 8x$

<u>Penyelesaian</u>

$y^2 = 8x$ berarti $p = 4$

Persamaan garis singgung dengan gradien 2 pada parabola $y^2 = 8x$

adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

$y = 2x + 1$

<u>Garis singgung untuk parabola yang berpuncak di (a,b)</u>

Dengan cara yang serupa dengan di atas, anda dapat menemukan persamaan garis singgung parabola yang berpuncak di (a,b) yaitu

$$\boldsymbol{y-b = m(x-a) + \frac{p}{2m}}$$

<u>Contoh 6</u>

Tentukan persamaan garis singgung yang gradiennya membentuk sudut 45^o dengan sumbu x dan menyinggung parabola $(y-4)^2 = 8(x-3)$

<u>Penyelesaian</u>

$(y-4)^2 = 8(x-3)$ berarti $p = 4$ dan koordinat puncaknya (3,4)

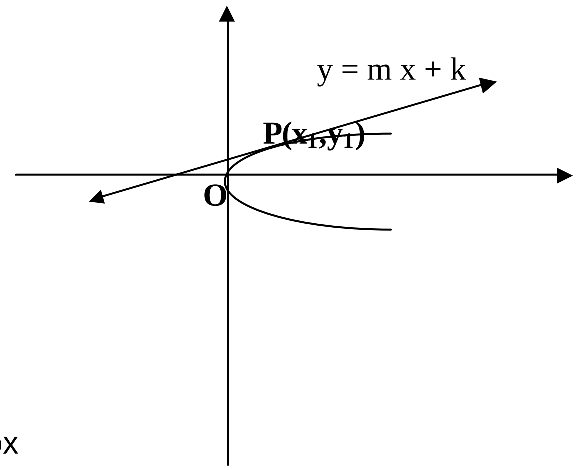
Gradiennya membentuk sudut 45^o dengan sumbu x berarti $m = 1$ (masih ingat dari mana asalnya?)

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$y - b = m(x - a) + \frac{p}{2m}$

$y – 4 = 1(x – 3) + 2$ atau $y = x + 3$

b. Jika titik singgungnya diketahui



Misal titik singgungnya di P (x_1,y_1)

Persamaan garis: $y = m\,x + k$

Karena garis singgung memotong parabola yaitu di tepat satu titik, maka berlaku:

$(m\,x + k)^2 = 2px$

$y_1^2 + m^2 (x – x_1)^2 + 2m\, y_1 (x – x_1) = 2px$

$m^2x^2 + (2mk\text{-}2p)x + k^2 = 0$; merupakan persamaan kuadrat dalam variabel x. Karena ada satu titik potong dengan parabola maka absisnya adalah:

$x_1 = - \frac{b}{2a} = - \frac{(2mk\ 2p)}{2m^2}$ ....(1)

$y_1 = m\ ?\frac{p\ ?\ mk}{m^2}? + k = \frac{p}{m}$ ....(2)

$y_1 = \frac{p}{m}$ atau $m = \frac{p}{y_1}$. Jadi gradien garis singgung adalah $m = \frac{p}{y_1}$.

Karena P (x_1,y_1) pada parabola maka berlaku: $y_1^2 = 2px_1$ setelah kita subtitusikan persamaan (1) dan (2) , maka akan diperoleh nilai k, yaitu:

$k = \frac{y_1}{2}$

Jadi $y = \frac{p}{y_1}x + \frac{y_1}{2}$, jika kedua ruas dikalikan y_1 maka didapat

$y_1y = px + \frac{y_1^{\ 2}}{2}$

$y_1y = px + px_1$, karena $y_1^2 = 2px_1$ atau $\frac{y_1^{\ 2}}{2} = px_1$

$y_1y = p(x + x_1)$

Jadi persamaan garis singgung melalui titik (x_1,y_1) pada parabola $y^2 = 2px$ adalah $y_1y = p(x + x_1)$

Contoh 7

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik P(-2,4) pada parabola $y^2 = -8x$

Penyelesaian

Dari $y^2 = -8x$ didapat p = - 4

Titik P(-2,4) terletak pada parabola $y^2 = -8x$

Persamaan garis singgungmelalui titik P adalah:

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

$$4y = -4(x - 2)$$

$$y = -x + 2$$

Contoh 8

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik P(-2,-3) pada parabola $y^2 = 8x$

Penyelesaian

Dari $y^2 = 8x$ didapat p = 4

Titik P(-2,3) tidak terletak pada parabola $y^2 = 8x$

Misal titik singgungnya $S(x_o, y_o)$. Maka persamaan garis singgung melalui s adalah $y_o y = 4(x + x_o)$.

Titik P(-2, -3) terletak pada garis singgung maka:

$-3y_o = 4(-2 + x_o)$ atau $4x_o + 3y_o - 8 = 0$ ....(1)

S pada parabola, maka $y_o^2 = -8x_o$ atau $x_o = \frac{1}{8} y_o^2$ .... (2)

Substitusi (2) pada (1) didapat $4(\frac{1}{8} y_o^2) + 3y_o - 8 = 0$

$$(\frac{1}{2} y_o^2) + 3y_o - 8 = 0$$

$$y_o^2 + 6y_o - 16 = 0$$

$$(y_o + 8)(y_o - 2) = 0$$

$$y_o = -8 \text{ atau } y_o = 2$$

Untuk $y_o = -8$ didapat $x_o = 8$ dan untuk $y_o = 2$ didapat $x_o = \frac{1}{2}$

Jadi:

Persamaan garis singgung melalui (8,-8) adalah $-8y = 4(x + 8)$

$$x + 2y + 8 = 0.$$

Persamaan garis singgung melalui ($\frac{1}{2}$, 2) adalah $2y = 4(x + \frac{1}{2})$

$$2x - y + 1 = 0.$$

Garis singgung untuk parabola yang berpuncak di (a,b)

Dengan cara yang serupa dengan di atas, anda dapat mneemukan persamaan garis singgung parabola di titik T (x_1,y_1) yang tidak berpuncak di di (a,b) yaitu:

$$\boxed{(y_1 - b)(y - b) = p(x + x_1 - 2a)}$$

Contoh 9

Tentukan persamaan garis singgung melalui titik P(5, -8) pada parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$

Penyelesaian

Dari parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$ didapat p = 4 dan puncaknya (3,4)

Titik (5, -8) terletak pada parabola $(y - 4)^2 = 8(x - 3)$

Jadi persamaan garis singgungnya adalah

$$(y_1 - b)(y - b) = p(x + x_1 - 2a)$$

$$(-8 - 4)(y - 4) = 4(x + 5 - 6)$$

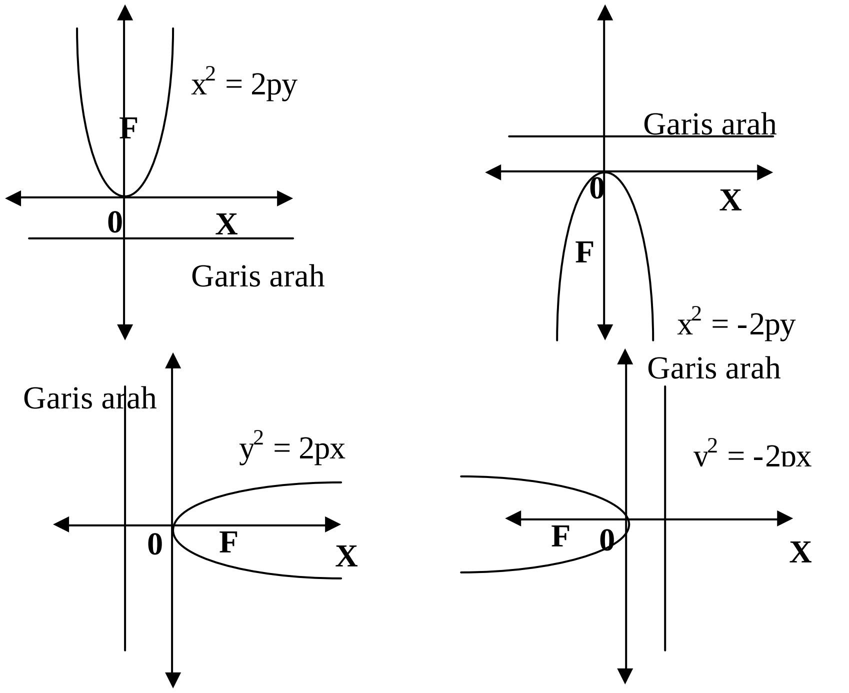
$$-12(y - 4) = 4(x - 1)$$

$$-12y + 48 = 4x - 4$$

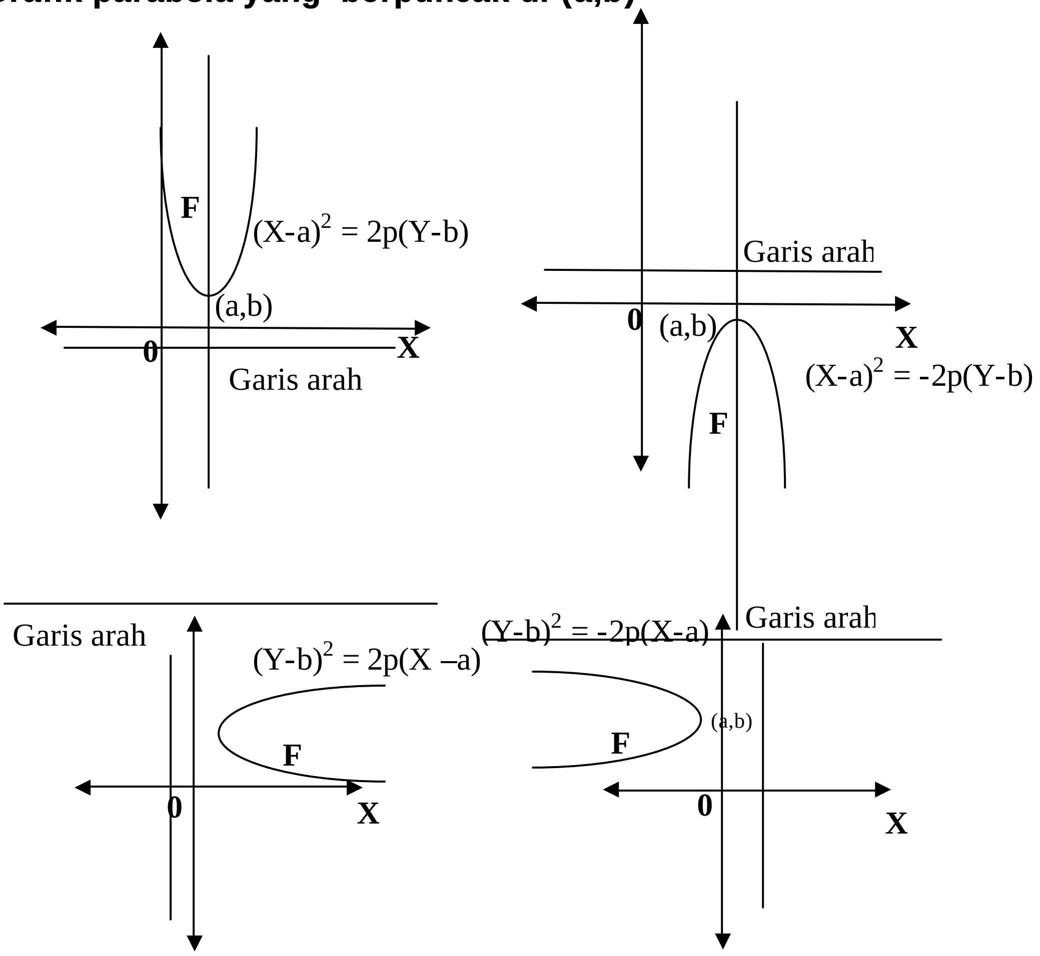
$$4x + 12y = 52$$

GRAFIK PERSAMAAN PARABOLA

a. Grafik parabola yang berpuncak di (0,0)



b. Grafik parabola yang berpuncak di (a,b)



c. Rankuman Kegiatan 3

- **Persamaan ellips dengan pusat di O(0,0) adalah** $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$
- **P**ersamaan ellips melalui titik T(x_1 ,y_1) dan pusatnya di titik P(? , ?) adalah

  $$\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1$$

- Persamaan garis singgungnya m pada ellips adalah $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ adalah

  $$y = mx \underline{?} \sqrt{b^2 ? a^2m^2}$$

- Persamaan garis singgung lingkaran yang tidak berpusat di (0,0) misal di (? , ?) yaitu y- ? = m(x- ?) $\underline{?} \sqrt{b^2 ? a^2m^2}$
- Persamaan garis singgung di titik singgung (x_1,y_1) pada ellips adalah

  $$\frac{x_1x}{a^2} ? \frac{y_1y}{b^2} ? 1$$

- Persamaan garis singgung di titik (x_1,y_1) pada ellips

  $\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1$, adalah

  $$\frac{(x_1 ? ?)(x ? ?)}{a^2} ? \frac{(y_1 ? ?)(y ? ?)}{b^2} ? 1$$

d. Tugas 3

Untuk memantapkan pemahaman anda, kerjakan tugas-tugas berikut

1. Tentukan tititk api dan persamaan garis arah parabola y^2=24x
2. Carilah persamaan garis yang menghubungkan titik M dan titik api parabola y^2=20x, jika absis titik M adalah 7.
3. Tentukan nilai k sehingga persamaan y=kx+2 menyinggung parabola y^2=4x.

4. Diketahui puncak parabola adalah A(6,-3) dan persamaan garis arahnya 3x-5y+1=0, tentukan titik api dari parabola.

e. Kunci Jawaban Tugas

Jika anda menemui kesulitan, anda dapat mengikuti penyelesaian berikut ini.

1. Persamaan parabola y^2=24x. berarti p=12

   jadi koordinat titik apinya F(6,0) dan persamaan garis arah parabola x= -6

2. Persamaan parabola y^2=2x. berarti p=1 dan F($\frac{1}{2}$,0)

   karena titik M pada parabola dan absisnya 8 maka ordinat titik M adalah y= ? 4

   berarti M_1(7,4) dan M_2(7, -4)

   Persamaan garis M_1 F adalah $\frac{y}{4} = \frac{x ? \frac{1}{2}}{7 ? \frac{1}{2}}$ atau 13y= 8x - 4

   Dan persamaan garis M_2 F adalah $\frac{y}{? 4} = \frac{x ? \frac{1}{2}}{7 ? \frac{1}{2}}$ atau 13y= 8x - 4

3. Misalkan S(x_1,y_1) titik singgung pada parabola.

   Maka persamaan garis singgung di S adalah y_1y=2(x+x_1) atau y=$\frac{2x}{y_1} ? \frac{2x_1}{y_1}$

   Agar garis y = kx+2 menyinggung parabola maka harus dipenuhi $\frac{2}{y_1} ? k$

   dan $\frac{2x_1}{y_1} ? 2$ berarti x_1=y_1

   Karena S pada parabola dan x_1=y_1 maka y_1 = 4. Jadi k=$\frac{1}{2}$

4. Titik api parabola terletak pada garis yang melalui puncak parabola tegak lurus garis arah dan jarak puncak ke titik api sama dengan jarak puncak ke garis arah.

Jarak A ke garis arah adalah d= $\left|\frac{18 ? 15 ? 1}{\sqrt{9 ? 25}}\right| = \sqrt{34}$ (Gunakan jarak titik ke garis)

Persamaan garis melalui A dan tegak lurus garis arah adalah:

Y+3= $-\frac{5}{3}$ (x-6) atau y= $-\frac{5}{3}x+7$

Misalkan F (x_1,y_1) titik api parabola

Maka $y_{1=}-\frac{5}{3}x_1+7$ dan AF = $\sqrt{(x_1 ? 6)^2 ? (y_1 ? 3)^2} = \sqrt{34}$

Berarti $\sqrt{\{(x_1 ? 6)^2 ? (\frac{? 5}{3}x_1 ? 7 ? 3)^2\}}$ =

Setelah kedua ruas dikuadratkan dan dijabarkan kita memperoleh

$$x_1^{\ 2} ? 12x_1 ? 27 ? 0$$

jadi $x_1 ? 9$ atau $x_1 ? 3$

untuk $x_1 ? 9$ diperoleh $y_1 ? ?8$ jadi C(9, -8)

untuk $x_1 ? 3$ diperoleh $y_1 ? 2$ jadi C(3,2)

Karena titik D(3,2) terletak pada garis arah 3x-5y+1=0, maka titik apinya F(9,-8).

f. Tes Formatif

1. Buatlah sketsa grafik parabola y^2 = 4x dan x^2 = -4y
2. Tentukan persamaan parabola yang berpuncak di titik pangkal O dan melalui (6,-6) serta menyinngung sumbu y
3. Tentukan persamaan garis singgung yang melalui (-2, -3) pada parabola y^2 = 8x
4. Tentukan puncak, sumbu simetri, fokus dan direktrik dari parabola dengan persamaan y^2 = - 6x

g. Kunci Tes Formatif

1. a) Parabola $y^2 = 4x$ puncaknya (0,0),

   dan melalui titik (1,1), (2,4), (-1, 1), (-2, 4) yang dicari dengan menggunakan tabel berikut. Anda dapat membuat sketsa sendiri!

x	1	2	-1	-2
y^2	1	4	1	4

   b) Parabola $x^2 = -4y$ puncaknya (0,0),

   dan melalui titik (1,-4), (2,-8), (-1, 4), (-2, 8) yang dicari dengan menggunakan tabel berikut. Anda dapat membuat sketsa sendiri!

y	1	2	-1	-2
x^2	-4	-8	4	8

2. Parabola yang berpuncak di titik pangkal O dan menyingung sumbu y, bentuk umumnya adalah $x^2 = 2py$

   Melalui (6,-6), maka 36 = -12 p, didapat p = -3

   Jadi persamaan parabola yang diminta adalah $x^2 = -6y$

3. Titik (-2, -3) tidak pada parabola $y^2 = 8x$.

   Dari $y^2 = 8x$ didapat p = 4

   Misal titik singgungnya (a,b), maka persamaan garis singgungnya adalah

   by = 4(x + a). Garis singgung ini melalui titik (-2, -3) maka

   -2b = 4(-3 + a) atau 4a + 2b = 12 ....(1)

   Sedangkan (a, b) pada parabola $y^2 = 8x$ maka berlaku $b^2 = 8a$ ......(2)

   Eliminasi dari (1) dan (2) didapat a = 2 dan b = 4 atau a = 4,5 dan b=-6

   Jadi persamaan garis singgungnya adalah :

   4y = 4(x + 2) atau y = x + 2, atau

   -6y = 4(x + 4,5) atau 4x + 6y + 18 = 0

4. Persamaan parabola $y^2 = -8x$ Puncak di (0,0)

   Persamaan sumbu simetri adalah y = 0 atau sumbu x

   Koordinat fokus adalah (-2, 0); Persamaan direktrik adalah x = 2

4. Kegiatan Belajar 4: Hiperbola

a. Tujuan Kegiatan Belajar 4

Setelah mempelajari Kegiatan Belajar 4 ini, diharapkan anda dapat mendeskripsikan hiperbola sesuai dengan ciri-cirinya.

? Memahami unsur-unsur hiperbola.

? Menentukan persamaan hiperbola dan dapat menggambar grafiknya.

? Dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan hiperbola.

b. Uraian Materi Kegiatan Belajar 4

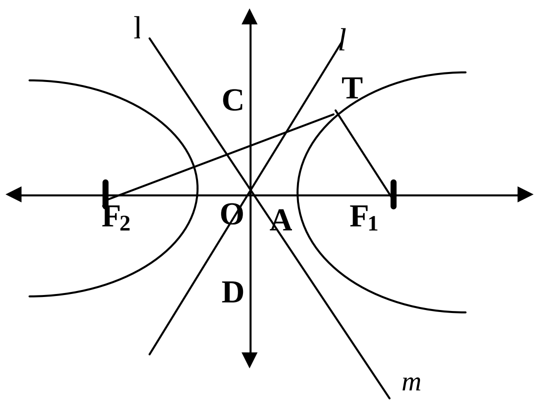
Kurva lengkung sederhana dan teratur yang mempunyai dua sumbu simetri adalah Hiperbola. Hiperbola merupakan bangun datar yang diperoleh dengan mengiris bangun ruang kerucut yang saling bertolak belakang memotong tegak lurus bangun kerucut tersebut tetapi tidak memotong puncak kerucut.

Dalam matematika hiperbola didefinisikan sebagai himpunan titik-titik (pada bidang datar) yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap besarnya. Selanjutnya dua titik itu disebut *Titik Fokus* Hiperbola.

Jadi hiperbola dapat dilukis jika diketahui dua titik fokus hiperbola dan suatu ruas garis yang panjangnya kurang dari dari jarak kedua titik fokus itu diketahui.

UNSUR-UNSUR HIPERBOLA

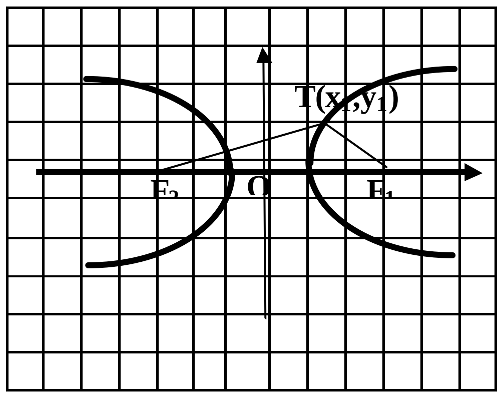
Perhatikan gambar hiperbola berikut ini:



Keterangan:
Titik O disebut koordinat titik pusat Hiperbola
Titik A dan B disebut koordinat titik-titik puncak hiperbola
Titik F_1 dan F_2 disebut koordinat titik-titik fokus hiperbola.
$\overline{AB}$ dan $\overline{CD}$ berturut-turut disebut sumbu mayor (sumbu panjang) dan sumbu minor (sumbu pendek)
AB = $|TF_1 - TF_2|$ = $|TF_2 - TF_1|$
Garis l dan m merupakan Asimtot hiperbola

MENENTUKAN PERSAMAAN HIPERBOLA

Misalkan $|F_1F_2|$ = 2c , merupakan jarak antara dua titik fokus. Maka $F_1(c,0)$ dan $F_2(-c,0)$. Misalkan selisih jarak yang tetap itu adalah 2a.



Ambil sebarang titik pada hiperbola misal $T(x_1, y_1)$ dan titik O sebagai pusat hiperbola.

Berdasarkan definisi hiperbola, yaitu:

$|TF_2|$ - $|TF_1|$ = 2a

$\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$ + $\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$ = 2a

$\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}$ = 2a - $\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$

$(x_1+c)^2 + y_1^2 = 4a^2 + (x_1 - c)^2 + y_1^2 - 4a\sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}$; kedua ruas dikuadratkan

$(x_1^2 + 2x_1c + c^2) + y_1^2 = 4a^2 + (x_1^2 - 2x_1c + c) + c^2 - 4a\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$

$4x_1c - 4a^2 = -4a\sqrt{(x_1 ? c)^2 ? y_1^2}$

$(x_1c - a^2)^2 = a^2 \{(x_1 - c)^2 + y_1^2\}$; kedua ruas dikuadratkan

$x_1^2c^2 + a^4 - 2x_1ca^2 = a^2 (x_1^2 - 2x_1c + c^2) + a^2y_1^2$

$(c^2 - a^2)x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Karena c > a maka $c^2 - a^2 > 0$ sehingga kita dapat memisalkan $c^2 - a^2 = b^2$ sehingga persamaan di atas menjadi

$b^2 x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2 b^2$

$$\frac{x_1^2}{a^2} ? \frac{y_1^2}{b^2} ? 1$$

Karena $T(x_1,y_1)$ sebarang titik yang diambil, maka setiap titik yang diambil memenuhi: $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$

Garis asimtot hiperbola adalah suatu garis yang melalui pusat hiperbola dan menyinggung hiperbola di jauh tak berhingga titik.

Misal persamaan garis yang melalui pusat hiperbola dan memotong hiperbola: $y = mx$

Sehingga minimal ada satu titik pada hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ yang memenuhi persamaan garis di atas. Akibatnya:

$$\frac{x^2}{a^2} ? \frac{(mx)^2}{b^2} ? 1$$

$b^2 x^2 - a^2 (mx)^2 = a^2b^2$; kedua ruas dikalikan a^2b^2

$b^2 x^2 - a^2 m^2x^2 = a^2b^2$

$(b^2 - a^2 m^2)x^2 = a^2b^2$

Maka $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 ? a^2m^2}}$ sehingga $y = \pm \frac{mab}{\sqrt{b^2 ? a^2m^2}}$

Jadi koordinat-koordinat titik potongnya adalah

$\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 ? a^2m^2}}, \frac{mab}{\sqrt{b^2 ? a^2m^2}}\right)$ dan $\left(\frac{? ab}{\sqrt{b^2 ? a^2m^2}}, \frac{? mab}{\sqrt{b^2 ? a^2m^2}}\right)$

Jika $b^2 - a^2m^2 > 0$ maka ada dua titik potong yang berlainan

Jika b^2-a^2m^2 < 0 maka tidak ada titik potong atau titik potongnya hayal.

Jika b^2-a^2m^2 = 0 maka titik potongnya di *jauh tak berhingga*.

Hal yang terakhir menyatakan bahwa b^2-a^2m^2 = 0 jika m = $\underline{+}\ \frac{b}{a}$ maka garis y= mx menyinggung hiperbola di *jauh tak berhingga*.

Jadi garis-garis y = $\underline{+}\ \frac{b}{a}$ x disebut *asimtot-asimtot hiperbola*.

Persamaan asimtot juga dapat dinyatakan dengan:

$\frac{x}{a}\ ?\ \frac{y}{b}\ ?\ \ 0$ dan $\frac{x}{a}\ ?\ \frac{y}{b}\ ?\ \ 0$; dengan membagi kedua ruas dengan b.

sehingga persamaan susunan asimtotnya adalah $\frac{x^2}{a^2}\ ?\ \frac{y^2}{b^2}\ ?\ \ 0$

Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}\ ?\ \frac{y^2}{b^2}\ ?\ \ 1$

Pusatnya di (0,0) ; Fokus di F_1(c,0) dan F_2(-c,0);

Puncak di A(a,0) dan B(-a,0);

Persamaan asimtotnya y = $\underline{+}\ \frac{b}{a}$ x

Eksentrisitas numeriknya e = $\frac{c}{a}$ > 1

Persamaan garis arah x = $\underline{+}\ \frac{a^2}{c}$

<u>Contoh 1</u>

Diketahui persamaan parabola $\frac{x^2}{16}\ ?\ \frac{y^2}{9}\ ?\ \ 1$

Tentukan Koordinat puncak, fokus, puat, persamaan asimtot dan eksentrisitas numerik. Juga buat skertsa hiperbolanya.

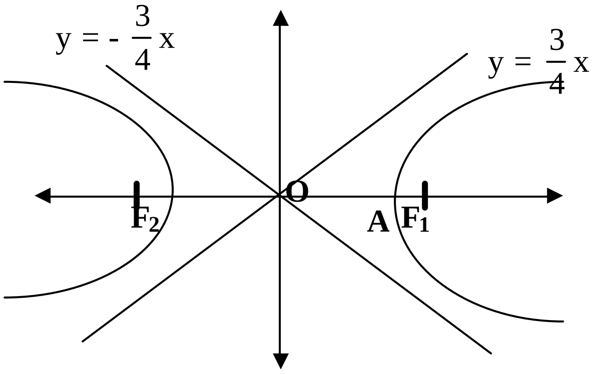
Penyelesaian

Dari parabola $\frac{x^2}{16} ? \frac{y^2}{9} ? 1$ didapat a = 4, b= 3 dan $c^2 - a^2 = b^2$

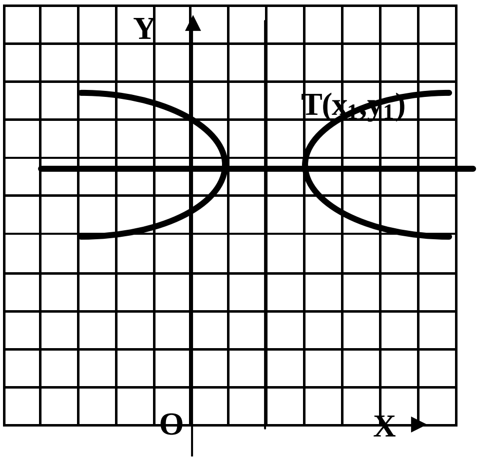
$c^2 - 16 = 9$ atau $c^2 = 25$, didapat c = 5 (kenapa –5 tidak digunakan?) Koordinat pusat adalah O(0,0); Koordinat puncak adalah B (-4,0) dan A(4,0); Koordinat Fokus F_1 (5,0) dan F_2 (-5,0)

Persamaan asimtot adalah $y = \frac{3}{4}x$ dan $y = -\frac{3}{4}x$

Eksentrisitas numeriknya adalah $e = \frac{5}{4}$



PERSAMAAN HIPERBOLA DENGAN PUSAT PADA (a,b)



Dengan cara yang sama, ambil sebarang titik pada lingkaran misal $T(x_1, y_1)$ dan titik P(? , ?) sebagai pusat hiperbola, maka akan didapat persamaan hiperbola yaitu:

$$\boxed{\frac{(x ? ?)^2}{a^2} ? \frac{(y ? ?)^2}{b^2} ? 1}$$

Pusatnya di (? , ?), fokus di F_1(? +c, ?) dan F_2(? - c, ?);

Puncak di A(? + a, ?) dan B(? - a, ?) ; Persamaan asimtotnya y - ? = $\pm \frac{b}{a}$ (x - ?) ; Eksentrisitas numeriknya $e = \frac{c}{a} > 1$

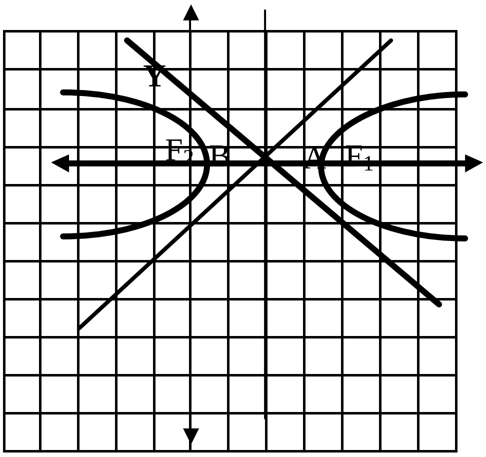
Contoh 2

Diketahui hiperbola dengan persamaan $\frac{(x ? 2)^2}{16} ? \frac{(y ? 8)^2}{9} ? 1$

Tentukan Koordinat puncak, fokus, puat, persamaan asimtot dan eksentrisitas numerik. Juga buat skertsa hiperbolanya.

Penyelesaian

Dari $\frac{(x ? 2)^2}{3} ? \frac{(y ? 8)^2}{1} ? 1$ didapat a = $\sqrt{3}$, b = 1, ? = 2, ? = 8 dan c = 2



Pusatnya di(2, 8)

Fokus di $F_1(4, 8)$ dan $F_2(0, 8)$;

Puncak di A(2 + $\sqrt{3}$, 8) dan B(2 - $\sqrt{3}$,

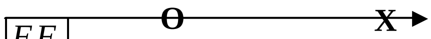
Persamaan asimtotnya y - 8 = $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (x

Eksentrisitas numeriknya e = $\frac{2}{\sqrt{3}}$ > 1

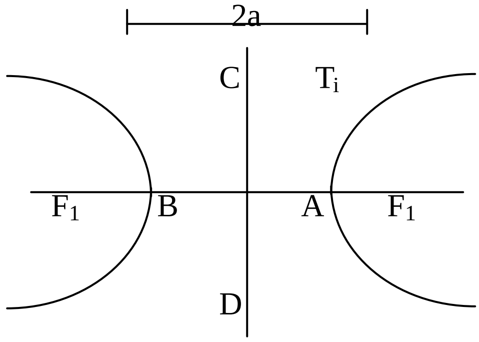
MEMBUAT SKETSA HIPERBOLA

Langkah-langkah:

1. Tetapkan titik F_1, F_2 dan panjang 2a < $|F_1F_2|$



2. Tentukan titik A dan B pada perpanjangan garis F_1F_2 sedemikian hingga $F_2B = F_1A$.



3. $|F_2B|$ = $|F_1A|$ = ½ ($|F_1F_2|$ - 2a).
4. Titik T_i diperoleh sebagai berikut:
5. Buat lingkaran dengan pusat F_1 dan jari-jari r_i > $|F_2A|$
6. Dari B busurkan lingkaran dengan jari-jari r_i - 2a
7. Perpotongan lingkaran pada langkah (a) dan (b) adalah titik T_i.
8. Lakukan langkah yang sama dengan mengganti peran F_1 dengan F_2 dan sebaliknya. Selamat mencoba

c. Rangkuman Kegiatan 4

☞ Persamaan parabola yang puncaknya O(0,0) dan sumbu simetrinya sumbu x adalah $y^2 = 2px$

☞ Persamaan parabola yang puncaknya P(a,b) dan sumbu simetrinya sejajar sumbu x adalah: $(y-b)^2 = 2p(x-a)$

☞ c. Persamaan garis singgung dengan gradien m pada parabola $y^2 = 2px$ adalah $y = mx + \frac{p}{2m}$

☞ Persamaan garis singgung pada parabola yang berpuncak di (a,b) yaitu

☞ $y-b = m(x-a) + \frac{p}{2m}$

☞ Jadi persamaan garis singgung melalui titik (x_1,y_1) pada parabola $y^2 = 2px$ adalah $y_1y = p(x + x_1)$

☞ Persamaan garis singgung parabola di titik T (x_1,y_1) yang tidak berpuncak di di (a,b) yaitu $(y_1 - b)(y - b) = p(x + x_1 - 2a)$

d. Tugas 4

Untuk lebih memahami apa yang anda pelajari, kerjakan latihan berikut secara mandiri.

1. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di (0,0) dan panjang sumbu hiperbola masing-masing 16 dan 12. Tentukan pula jarak antara dua fokus, persamaan direktrik, dan asimtot.
2. Tentukan persamaan hiperbola yang pusatnya di (0,0) jika eksentrisitas nya $\frac{13}{12}$ sedangkan jarak antara kedua fokus 56.
3. Diketahui hiprbola $9x^2 - 16y^2 = 144$. Tentukan direktrik (garis arah), fokus, dan puncaknya. Gambar sketsa grafiknya
4. Diketahui hiperbola $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$. Tentukan direktrik (garis arah), fokus, dan puncaknya. Gambar sketsa grafiknya
5. Temukan persamaan hiperbola yang titk-titik apinya terletak pada sumbu x, simetris terhadap O dan melalui titik M(-5,3)dan eksentrisitas numeriknya $e=\sqrt{2}$.

e. Kunci Jawaban Tugas 4

Apabila anda menemui kesulitan dalam megerjakan soal latihan, anda dapat mengikuti penyelesaian berikut.

1. Panjang sumbu hiperbola masing-masing 12 dan 18, berarti 2a = 16 dan 2b = 12. Jadi a = 8 dan b = 6, dengan demikian c = 10.

   Koordinat fokus (10,0) dan (–10,0)

   Persamaan direktriknya $x = \pm \frac{64}{10}$

   Persamaan asimtotnya $y = ?\ \frac{3}{4}x$

Jarak kedua fokus = 20

2. Jarak antara kedua fokus 52 berarti c = 26. Eksentrisitasnya $\frac{c}{a}$ = $\frac{13}{12}$

   maka a = 24 dan b = 10. Persamaan hiperbolanya $\frac{x^2}{576} ? \frac{y^2}{10} ? 1$

3. $9x^2 - 16y^2 = 144$, kedua ruas dibagi dengan 144 didapat $\frac{x^2}{16} ? \frac{y^2}{9} ? 1$,

   berarti a = 4, b = 3 dan didapat c = 5

   Direktrik x = $? \frac{16}{5}$, fokus (5,0) dan (-5,0) dan puncak (4,0) dan (-4,0)

4. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$

   $9x^2 - 36x - 16y^2 - 32y - 124 = 0$

   $9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) - 124 = 0$

   $9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) - 124 - 36 + 16 = 0$

   $9(x^2 - 4x + 4) - 16(y^2 + 2y + 1) = 144$

   $9(x - 2)^2 - 16(y + 1)^2 = 144$, kedua ruas dibagi 144 didapat

   $\frac{(x ? 2)^2}{16} - \frac{(y ? 1)^2}{9} = 1$, dengan demikian a = 4, b = 3 dan c = 5. Yang lain anda dapat mencarinya.

5. Persamaan hiperbola yang ditanyakan berbentuk $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$

   titik M(-5,3) pada hiperbola, berarti $\frac{25}{a^2} ? \frac{9}{b^2} ? 1$ atau $25b^2 = a^2b^2 + 9a^2$.

   Karena e= $\frac{c}{a}$ = $\sqrt{2}$ maka $c^2 = 2a^2$.

   Pada hiperbola berlaku $c^2 = a^2 + b^2$, maka $2a^2. = a^2 + b^2$ atau $a^2 = b^2$

   Akibatnya $25b^2 = b^4 + 9b^2$ atau $b^2 = 16$ sehingga $a^2 = 16$

   Jadi persamaan hiperbola yang ditanyakan adalah $\frac{x^2}{16} ? \frac{y^2}{16} ? 1$

g. Tes Formatif

1. Diketahui hiperbola pusatnya di (0,0), eksentrisitasnya $\frac{13}{12}$ dan jarak kedua fokus adalah 39. Tentukan persamaan hiperbola tersebut
2. Diketahui hiperbola x^2 - 16 y^2 – 4 x –32y –28 =0. Tentukan koordinat fokus dan puncak hiperbola
3. Tentukan persamaan garis singgung $\frac{x^2}{64} ? \frac{y^2}{36} ? 1$ yang sejajar garis x +y + 1 =0
4. Tentukan persamaan garis singgung $\frac{x^2}{24} ? \frac{y^2}{8} ? 1$ yang melalui titik (6, 2).

h. Kunci Tes Formatif

1. Jarak antara kedua fokus 26 berarti c = 13. Eksentrisitasnya $\frac{c}{a}$ **=** $\frac{13}{12}$ maka a = 12 dan b = 5. Persamaan hiperbolanya $\frac{x^2}{144} ? \frac{y^2}{25} ? 1$
2. x^2 - 16 y^2 – 4 x –32y –28 =0
   x^2 – 4 x - 16 y^2 –32y –28 =0
   x^2 – 4 x - 16 (y^2 –2)–28 =0
   (x^2 – 4 x + 4) - 16 (y^2 –2y +1))–28 =4 - 16
   $(x – 2)^2$ - 16$(y – 1)^2$ = 16, kedua rus dibagi 16 didapat
   $\frac{(x ? 2)^2}{16}$ - $\frac{(y ? 1)^2}{1}$ = 1 dari bentuk terakhir didapat a = 4, b = 1
   maka c = $\sqrt{17}$.
   Jadi koordinat fokus adalah ($\sqrt{17}$, 0) dan (-$\sqrt{17}$, 0) dan koordinat puncak parabola adalah (-4, 0) dan (4, 0)

3. Gradien x +y + 1 =0 adalah -1

Garis singgung sejajar garis x +y + 1 =0, maka gradiennya sama yaitu –1

Dari $\frac{x^2}{64} ? \frac{y^2}{36} ? 1$ didapat a = 8, b=6

Seperti halnya pada ellips, persamaan garis singgung yang gradiennya m pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} ? \frac{y^2}{b^2} ? 1$ adalah

$$\boxed{y = mx ? \sqrt{a^2m^2 ? b^2}}$$

y = mx $? \sqrt{a^2m^2 ? b^2}$

y = -1x $? \sqrt{64 ? 36}$

y + x = $? \sqrt{28}$

4. Titik (6, 2). pada $\frac{x^2}{24} ? \frac{y^2}{8} ? 1$

Seperti halnya pada ellips, persamaan garis singgung melalui titik (x_1, y_1) adalah

$$\boxed{\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2}}$$

Jadi persamaan garis singgungnya $\frac{6x}{24} - \frac{2y}{8} = 1$

BAB III. EVALUASI

A. Evaluasi Tes Tertulis

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan syarat:
   b) bertitik pusat di P(3,-4) dan melalui O(0,0)
   c) melalui titik–titk K(3,1) dan L(-1,3) dan titik pusatnya terletak pada garis 3x-y-2=0
2. tentukan titik pusat dan jari-jari dari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.
3. Tentukan koordinat titik-titik api dari ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$.
4. Tentukan persamaan ellips yang eksentrisitas numeriknya e = $\frac{2}{3}$ salah satu titik apinya F(6,0).
5. Tentukan tititk api dan persamaan garis arah parabola $y^2=24x$
6. Diketahui hiperbola $9x^2 – 16y^2 – 36x – 32y - 124 = 0$. Tentukan direktrik (garis arah), fokus, dan puncaknya.

B. Kunci Jawaban Tes Tertulis

1. a) Persamaan lingkaran dengan pusat P(3,-4) dan melelui O(0,0) adalah $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$. Jarak OP sebagai jari-jari

   b) Misalkan persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 + Ax \ \ By + C = 0$, dimana pusat lingkaran $P(?\frac{1}{2}A, ?\frac{1}{2}B)$. Koordinat-kordinat titik K dan L disubstitusikan pada persamaan lingkaran dan koordinat P disubstitusikan pada garis $3x - y - 2 = 0$. Sehingga diperoleh sistem persamaan linier yang terdiri atas 3 persamaan dan 3 variabel yaitu A, B, dan C. Selesaikan sistem persamaan itu dengan substitusi dan/atau eliminasi didapat A = -4, B = -8 dan C = 10.

   Jadi persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 = 0$

   d) Persamaan lingkaran tersebut dapat diubah menjadi

   $(x + \frac{5}{2})^2 + (y + 4)^2 = \frac{25}{4}$, jadi pusatnya $(-\frac{5}{2}, -1)$ dan jari-jarinya $\frac{5}{2}$

3. Persamaan ellips $\frac{x^2}{100} ? \frac{y^2}{36} ? 1$ berarti a = 10 dan b=6

   Pada ellips berlaku $b^2 = a^2 - c^2$, dengan demikian c = 8, ini berarti koordinat titik api $F_1(8,0)$ dan $F_2(-8,0)$

4. Eksentrisitas numeriknya $e = \frac{2}{3} = \frac{c}{a}$. Karena c = 6, maka a = 9

   $a^2 - c^2 = b^2$

   $b^2 = 81 - 36$ atau $b^2 = 45$

   $b = \sqrt{45}$, mengapa $-\sqrt{45}$ tidak digunakan?

   Jadi persamaan ellips adalah $\frac{x^2}{81} ? \frac{y^2}{45} ? 1$

5. Persamaan parabola $y^2=24x$. berarti p=12

   jadi koordinat titik apinya F(6,0) dan persamaan garis arah parabola x= -6

6. $x^2 – 16y^2 – 36x – 32y - 124 = 0$

$9x^2 – 36x -16y^2 – 32y - 124 = 0$

$9(x^2 – 4x) -16(y^2 + 2y) - 124 = 0$

$9(x^2 – 4x + 4) -16(y^2 + 2y + 1) - 124 –36 + 16 = 0$

$9(x^2 – 4x + 4) -16(y^2 + 2y + 1) = 144$

$9 (x – 2)^2 – 16(y + 1)^2 = 144$, kedua ruas dibagi 144 didapat

$\frac{(x ? 2)^2}{16} - \frac{(y ? 1)^2}{9} = 1$, dengan demikian a = 4, b = 3 dan c = 5. Yang lain anda dapat mencarinya.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada guru untuk melakukan uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Rawuh Dkk, 1975. *Ilmu Ukur Analitis, Teori dan Soal-Soal*. Bandung: Terate

Thomas, George B. dan Finney, Ross L., 1978. *Calculus and Analytic Geometry, Fifth Edition*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company